

תרגיל 6 תשע"ה: סטיות מיעילות הנגרמות על-ידי מוצר ציבורי

שאלה 1

א. תשובה:

$$MRS^1(G, x_1) + MRS^2(G, x_2) = \frac{x_1}{G} + \frac{2 \cdot x_2}{G} = \frac{12 - g_1}{G} + \frac{2 \cdot (15 - g_2)}{G} = 1$$

משוואת התקציב של צרכן 1 היא: $g_1 + x_1 = 12$ ולכן: $x_1 = 12 - g_1$ בדומה משוואת התקציב של צרכן 2 היא: $g_2 + x_2 = 15$ ולכן: $x_2 = 15 - g_2$

נציב: $G = g_1 + g_2$ ונקבל:

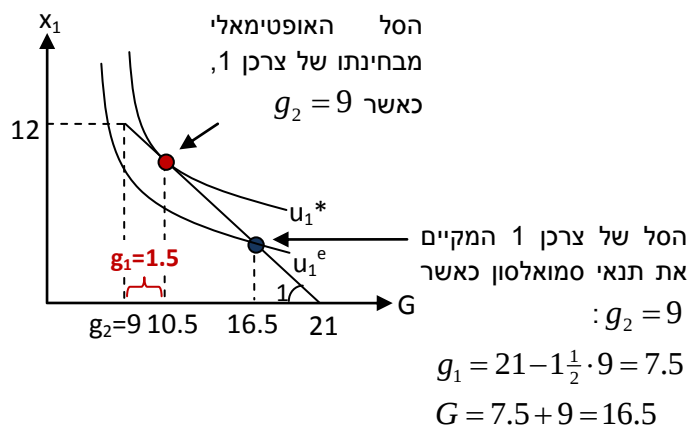
$$12 - g_1 + 2 \cdot (15 - g_2) = g_1 + g_2$$

כלומר:

$$g_1 = 21 - 1\frac{1}{2}g_2$$

ב. תשובה:

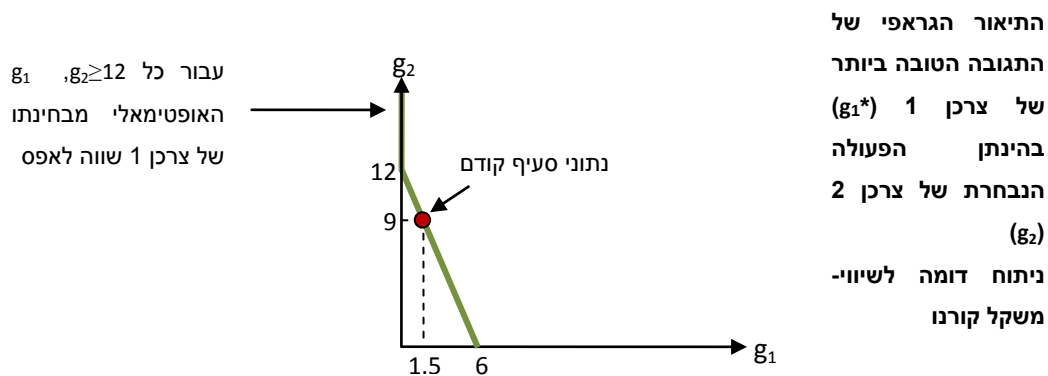
$$MRS^1(G, x_1) = \frac{x_1}{G} = \frac{12 - g_1}{g_1 + g_2} = \frac{12 - g_1}{g_1 + 9} = 1 \Rightarrow g_1^* = 1.5$$



ג. תשובה:

$$MRS^1(G, x_1) = \frac{x_1}{G} = \frac{12 - g_1}{g_1 + g_2} = 1 \Rightarrow g_1^* = 6 - \frac{1}{2}g_2$$

הערה: עבור כל $g_2 \geq 12$, g_1 האופטימאלי מבחינתו של צרכן 1 שווה לאפס ($g_1^* = 0$)

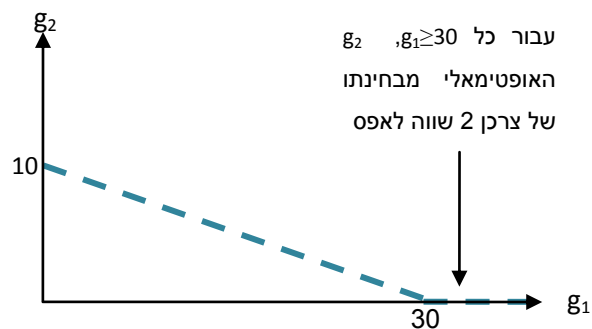


תשובה:

ד.

$$MRS^2(G, x_2) = \frac{2 \cdot (15 - g_2)}{g_1 + g_2} = 1 \Rightarrow g_2^* = 10 - \frac{1}{3}g_1$$

הערה: עבור כל $g_1 \geq 30$, g_2 האופטימאלי מבחינתו של צרכן 2 שווה לאפס ($g_2^* = 0$)



תשובה: שיווי-משקל מתקבל בנקודה בה שני הצרכנים מגיבים

ה.

אופטימאלית זה על פעולתו של זה. כלומר שיווי-משקל (פנימי) מתקבל על-ידי פתרון מערכת

המשוואות:

$$\left\{ \begin{array}{l} G^* = g_1^* + g_2^* = 10.8 \\ g_1^* = 1.2, g_2^* = 9.6 \end{array} \right.$$

הסל של צרכן 1 המקיים את תנאי

סמואלסון כאשר $g_2 = 9.6$:

$g_1 = 21 - 1\frac{1}{2} \cdot 9.6 = 6.6$ ולכן:

$$G^e = 6.6 + 9.6 = 16.2$$

לעומת זאת בשיווי-משקל

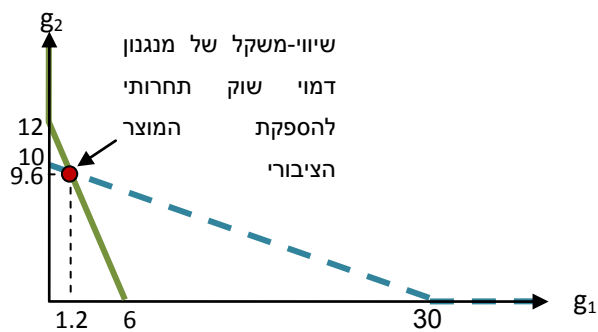
$$G^* = 10.8$$

הערה: ניתן לבדוק מקביל את תנאי

היעילות כאשר $g_1 = 1.2$. במקרה

כזה נקבל כי $g_2 = 13.2$, כלומר:

$$G^e = 1.2 + 13.2 = 14.4$$



1. **תשובה:** ראינו כבר במסגרת התשובה לסעיף הקודם, כי תנאי

היעילות אינו מתקיים. ניתן לראות זאת גם באופן אחר – על ידי הצבת כמויות שיווי-משקל בביטוי

המתאר את סכום שיעורי התחלופה השוליים בצריכה של שני הצרכנים (צד שמאל של תנאי

סמואלסון בניסוחו המקורי):

$$MRS^1(G, x_1) + MRS^2(G, x_2) = \frac{12 - 1.2}{10.8} + \frac{2 \cdot (15 - 9.6)}{10.8} = 2$$

מאחר שתנאי סמואלסון ליעילות מחייב שהסכום יהיה שווה ל-1 (יחס המחרים הנתון המשקף

את RPT), הרי שאנו מסיקים כי תנאי זה אינו מתקיים.

2. **תשובה:** כפי שראינו בסעיף א, בנתוני השאלה, תנאי סמואלסון

ניתן להצגה כך: $g_1 = 21 - 1\frac{1}{2}g_2$, כלומר קיימים אינסוף צירופים של g_1 ושל g_2 שמקיימים את

תנאי היעילות (גם כאשר מביאים בחשבון כי בהתאם למגבלות התקציב של שני הצרכנים:

$0 \leq g_1 \leq 12$ ו- $0 \leq g_2 \leq 15$). נדגיש כי צירופים אלה שונים זה מזה בכמות

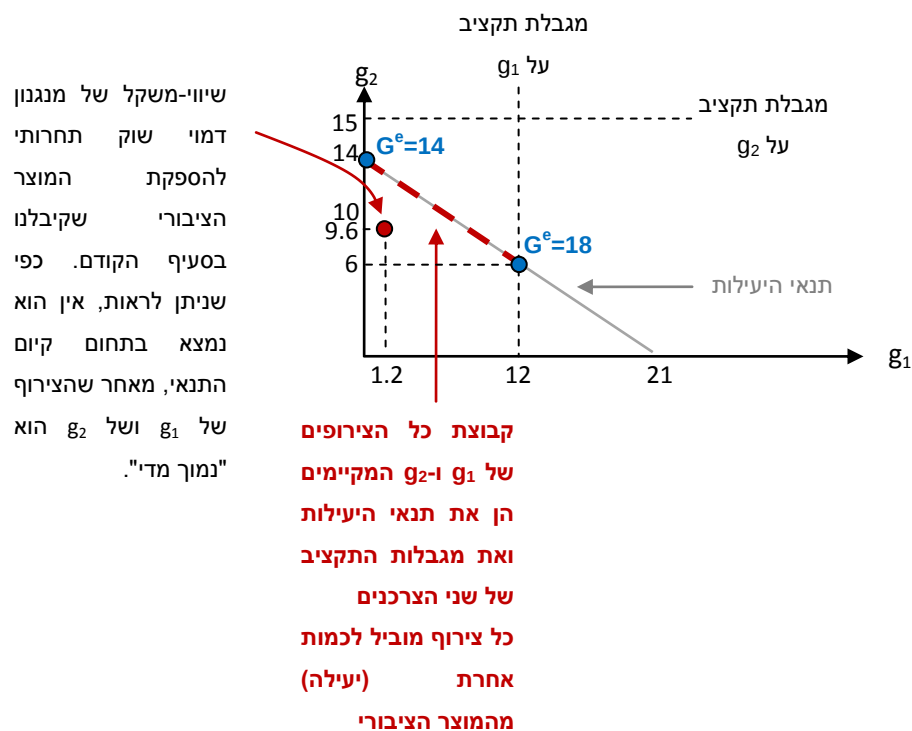
המסופקת הכוללת מהמוצר הציבורי (לדוגמה: שלושת הצירופים הבאים מקיימים את תנאי

היעילות, אך שונים זה מזה בכמות הכוללת המסופקת מהמוצר הציבורי: (1)

(2) $G^e = 14 \Leftarrow g_1 = 0, g_2 = 14$

(3) $G^e = 18 \Leftarrow g_1 = 12, g_2 = 6$

להלן הצגה גרפית של תנאי היעילות (יחד עם מגבלות על g_1 ושל g_2 הנובעות ממגבלות התקציב של שני הצרכנים):



שאלה 2

תשובה:

א.

$$MRS^1(G, x_1) + MRS^2(G, x_2) = \frac{3}{G} + \frac{5}{G} = 1 \Rightarrow G^e = 8$$

דגש 1: בניגוד לשאלה הקודמת, במקרה זה מתקבלת כמות יעילה יחידה מהמוצר הציבורי.
דגש 2: פונקציות התועלת של שני הצרכנים הן קוואזי ליניאריות, כך ששיעורי התחלופה השוליים בצריכה שלהם תלויים אך ורק ב- G . כלומר, תנאי זה התקבל ללא התייחסות למגבלות התקציב (של הצרכנים או של המשק). לאור זאת יש להדגיש כי זוהי אכן הכמות האופטימאלית רק אם יש לצרכנים די משאבים כדי לממש אותה (במקרה הנתון אכן יש להם די משאבים לכך. במהלך הקורס נתמקד במקרים מסוג זה).

תשובה:

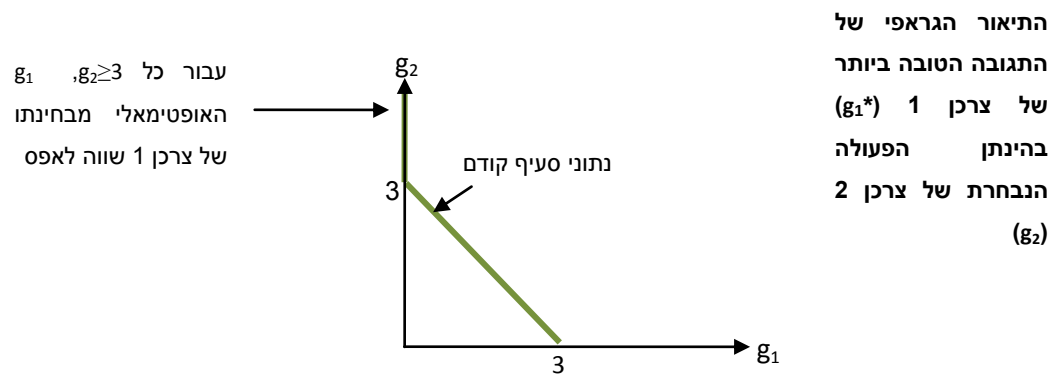
ב.

$$MRS^1(G, x_1) = \frac{3}{g_1 + g_2} = 1 \Rightarrow g_1^* = 3 - g_2$$

בהנחה ש- $g_2 = 1$, g_1 האופטימאלי מבחינתו של צרכן 1 הוא

$$g_1^* = 2 \text{ (פתרון פנימי).}$$

- בהנחה ש- $g_1, g_2 = 4$ האופטימאלי מבחינתו של צרכן 1 הוא $g_1^* = 0$ (פתרון פינתי). באופן כללי, בכל מקרה בו $g_1, g_2 \geq 3$ האופטימאלי מבחינתו של צרכן 1 הוא $g_1^* = 0$.

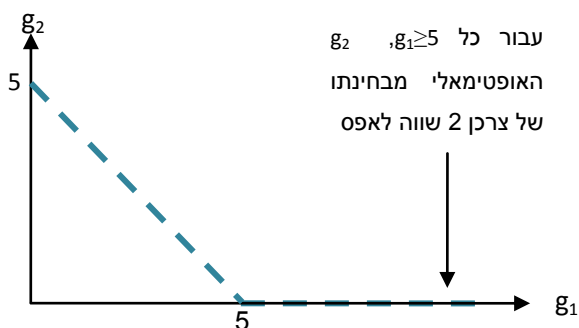


תשובה:

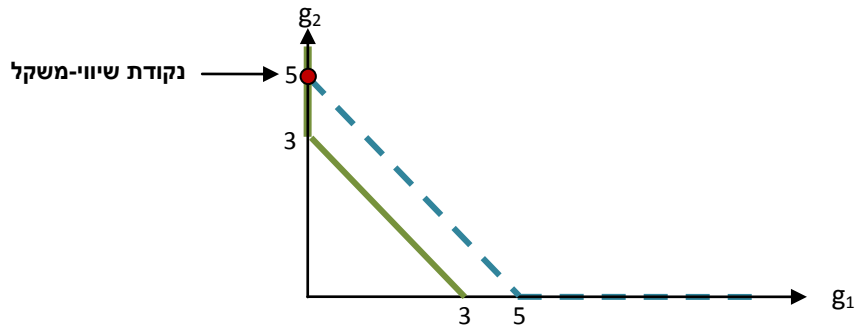
ג.

$$MRS^2(G, x_2) = \frac{5}{g_1 + g_2} = 1 \Rightarrow g_2^* = 5 - g_1$$

הערה: עבור כל $g_1 \geq 5$, g_2 האופטימאלי מבחינתו של צרכן 2 שווה לאפס ($g_2^* = 0$)



- ד. **תשובה:** במקרה זה, שיווי-משקל אינו פנימי (שתי המשוואות שקיבלנו בסעיפים הקודמים אינן יכולות להתקיים בו-זמנית). שיווי-המשקל מתקבל בנקודה בה: $G^* = 5 \Leftarrow g_1^* = 0, g_2^* = 5$



הערה: נשים לב, כי ניתן להכליל את התשובה באופן הבא: אם קיימים n פרטים, כך ש-
 $u^i(G, x_i) = b_i \ln G + x_i$ ומתקיים: $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_n$, אז:
 $G^* = b_n \Leftarrow g_1^* = g_2^* = g_3^* = \dots = g_{n-1}^* = 0, g_n^* = b_n$

- ה. **תשובה:** לא. קיבלנו כי הכמות היעילה של המוצר הציבורי היא $G^e = 8$ ואילו בשיווי-משקל קיבלנו $G^* = 5$ - כלומר קיימת הספקת חסר של המוצר הציבורי.
- ו. **תשובה:** התשובות לא היו משתנות. פונקציות התועלת הן קוואזי-ליניאריות באופן ש- G הוא מצרך ניטראלי (בתחום בו לצרכנים יש הכנסה מספיק גבוהה). לפיכך ניתן לראות כי הן הכמות היעילה והן כמות שיווי-משקל אינן משתנות כאשר הכנסת הצרכנים גדלה.

שאלה 3

א. **תשובה:** להלן התנאי:

$$MRS^1(G, x_1) + MRS^2(G, x_2) = \frac{2 \cdot (96 - g_1)}{G} + \frac{2 \cdot (96 - g_2)}{G} = 1$$

$$\frac{384 - 2(g_1 + g_2)}{G} = 1$$

$$G^e = \frac{384}{3} = 128$$

ב. **תשובה:** נחשב את g_1 האופטימאלי לכל g_2 :

$$MRS^1(G, x_1) = \frac{2(96 - g_1)}{g_1 + g_2} = 1 \Rightarrow g_1^* = 64 - \frac{1}{3}g_2$$

משיקולי סימטריה: $g_2^* = 64 - \frac{1}{3}g_1$ וכמו כן: $g_1^* = g_2^*$

מכאן נקבל שבשיווי-משקל: $G^* = 96 \Leftarrow g_1^* = g_2^* = 48$

ג. **תשובה:**

$$\frac{G^e}{G^*} = \frac{128}{96} = \frac{4}{3}$$

ד.

תשובה: להלן התשובות לשלושת תתי הסעיפים:

שינוי הכנסות הצרכנים כך שסך ההכנסות נותר זהה**תנאי סמואלסון: ללא שינוי:**

$$MRS^1(G, x_1) + MRS^2(G, x_2) = \frac{2 \cdot (m_1 - g_1)}{G} + \frac{2 \cdot (m_2 - g_2)}{G} = 1$$

$$\frac{2 \cdot \overbrace{(m_1 + m_2)}^{192} - 2 \cdot \overbrace{(g_1 + g_2)}^G}{G} = 1$$

$$G^e = 128$$

שיווי-משקל: סה"כ כמות המוצר הציבורי נשארת ללא שינוי. לעומת זאת, g_1^* ו- g_2^* משתנים.

נחשב את g_1 האופטימאלי לכל g_2 :

$$MRS^1(G, x_1) = \frac{2(78 - g_1)}{g_1 + g_2} = 1 \Rightarrow g_1^* = 52 - \frac{1}{3}g_2$$

הערה: עבור כל $g_2 \geq 156$, $g_1 \geq 0$ האופטימאלי מבחינתו של צרכן 1 שווה לאפס ($g_1^* = 0$).

נחשב את g_2 האופטימאלי לכל g_1 :

$$MRS^2(G, x_2) = \frac{2(114 - g_1)}{g_1 + g_2} = 1 \Rightarrow g_2^* = 76 - \frac{1}{3}g_1$$

הערה: עבור כל $g_1 \geq 228$, $g_2 \geq 0$ האופטימאלי מבחינתו של צרכן 2 שווה לאפס ($g_2^* = 0$).

שיווי-משקל מתקבל בנקודה בה כל צרכן בוחר בכמות אופטימאלית בהינתן הכמות

$$\boxed{G^* = 96 \Leftarrow g_1^* = 30, g_2^* = 66}$$

שנבחרה על-ידי הצרכן האחר: לסיכום, מאחר שהן הכמות היעילה של המוצר הציבורי והן הכמות המסופקת בשיווי-

משקל נותרו ללא שינוי, הרי שגם חומרת בעיית הטרמפיסט נותרה ללא שינוי.¹**הכנסות שני הצרכנים גדלות באותו שיעור****נסמן את הכנסות שני הצרכנים ב-m:** $m_1 = m_2 = m$ **תנאי סמואלסון:**

$$MRS^1(G, x_1) + MRS^2(G, x_2) = \frac{2 \cdot (m - g_1)}{G} + \frac{2 \cdot (m - g_2)}{G} = 1$$

$$\frac{4m - 2 \cdot \overbrace{(g_1 + g_2)}^G}{G} = 1$$

$$\boxed{G^e = \frac{4m}{3}}$$

¹ למעשה, אפשר להראות באופן כללי כי בנתוני השאלה סך הכמות המסופקת מהמוצר הציבורי בשיווי-משקל תלויה אך ורק בסך הכנסות הפרטים. כלומר, בכל מקרה בו סכום ההכנסות של שני הצרכנים שווה לסכום המקורי (192), סך הכמות המסופקת מהמוצר הציבורי בשיווי-משקל שווה ל-96.

שיווי-משקל:נחשב את g_1 האופטימאלי לכל g_2 :

$$MRS^1(G, x_1) = \frac{2(m - g_1)}{g_1 + g_2} = 1 \Rightarrow g_1^* = \frac{2}{3}m - \frac{1}{3}g_2$$

משיקולי סימטריה: $g_1^* = g_2^*$ ומכאן נקבל: $\boxed{G^* = m}$ $\Leftrightarrow g_1^* = g_2^* = \frac{1}{2}m$

חומרת בעיית הטרמפיסט: $\frac{G^e}{G^*} = \frac{\frac{4}{3}m}{m} = \frac{4}{3}$. כלומר חומרת בעיית הטרמפיסט לא

תלויה בגובה ההכנסות של הפרטים.

מספר הצרכנים גדל**נסמן את מספר הצרכנים ב-n ואת הכנסת כל פרט ב-m****תנאי סמואלסון:**

$$MRS^1(G, x_1) + \dots + MRS^n(G, x_n) = \frac{2 \cdot (m - g_1)}{G} + \dots + \frac{2 \cdot (m - g_n)}{G} = 1$$

$$\frac{2nm - 2(\overbrace{g_1 + \dots + g_n}^G)}{G} = 1$$

$$\boxed{G^e = \frac{2nm}{3}}$$

שיווי-משקל:נחשב את g_1 האופטימאלי לכל $(g_2, \dots, g_n)$:

$$MRS^1(G, x_1) = \frac{2(m - g_1)}{g_1 + g_2 + \dots + g_n} = 1$$

משיקולי סימטריה: $g_1^* = \dots = g_n^* = g^*$ ומכאן נקבל:

$$MRS^1(G, x_1) = \frac{2(m - g^*)}{\underbrace{g^* + g^* + \dots + g^*}_{ng^*}} = 1$$

$$\boxed{G^* = ng^* = \frac{2nm}{n+2}} \Leftrightarrow \boxed{g^* = \frac{2m}{n+2}}$$

חומרת בעיית הטרמפיסט: $\frac{G^e}{G^*} = \frac{\left(\frac{2nm}{3}\right)}{\left(\frac{2nm}{n+2}\right)} = \frac{n+2}{3}$. כלומר חומרת בעיית

הטרמפיסט הולכת וגדלה ככל שמספר הפרטים גדל.

שאלה 4

תשובה: הטענה אינה נכונה. מאחר ששיווי-משקל הינו פנימי, עבור כל פרט i $MRS^i(G^*, x_i) = 1$ מתקיים כי: $\sum_i MRS^i(G^*, x_i) = n$ ומכאן ש-

ומכאן שלא מתקיים תנאי סמואלסון ליעילות הכמות המסופקת מהמוצר הציבורי.