

תרגיל 3 תשע"ה: כלכלה עם ייצור

שאלה 1

א. **תשובה סופית:** $\frac{1}{2}x + y^2 = 48$

הסבר: מאחר שקיים גורם ייצור יחיד (A) ושפונקציות הייצור של שני המצרכים מונוטוניות עולות ממש בכמות גורם ייצור A, כל הקצאה של הכמות התחילית שעומדת לרשות המשק של גורם הייצור בין שני המצרכים (ללא שארית), מובילה לייצור יעיל. כלומר, כל עלייה בכמות המיוצרת מ-X מחייבת צמצום של הכמות המיוצרת מ-Y ולהפך.

טכנית עקומת התמורה מתקבלת על-ידי (1) מציאת הפונקציות ההופכיות לפונקציות הייצור הנתונות ו-(2) הצבתן במשוואת המשאבים:

(1) **מציאת הפונקציות ההופכיות**

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 2a_x \\ a_y &= y^2 \Leftrightarrow y = a_y^{1/2} \end{aligned}$$

(2) **הצבת הפונקציות ההופכיות במשוואת המשאבים**

$$a_x + a_y = 48 \quad \text{היא: גורם הייצור A}$$

על-ידי ההצבה נקבל את התוצאה הסופית הרשומה בתחילת התשובה.

ב. **תשובה סופית:** $\pi_x = 0$

הסבר: מאחר שפונקצית הייצור של X ליניארית, התפוקה השולית של גורם ייצור A קבועה ($MP_a^x = 2$). במקרה שבו התפוקה השולית קבועה אנחנו מבחינים בין שלושה מקרים:

(1) התפוקה השולית של גורם ייצור A גדולה מהמחיר הריאלי של A ($MP_a > \frac{p_a}{p_x}$): במקרה

כזה פירמה תחרותית מעוניינת להגדיל את התפוקה שלה עוד ועוד ("עד אינסוף"), מאחר שכל גידול בכמות התפוקה צפוי להגדיל את הרווח שלה. מימוש התוכנית להגדלת התפוקה אינו אפשרי בשיווי-משקל תחרותי מאחר שאין כמות מספקת של גורם ייצור A. (במונחים של ביקוש והיצע – קיים עודף ביקוש לגורם ייצור A)

(2) התפוקה השולית של גורם ייצור A שווה למחיר הריאלי של A ($MP_a = \frac{p_a}{p_x}$): במקרה

כזה הפדיון הצפוי מכל יחידת X שווה לעלות הייצור שלה. הפירמה אדישה בין כל רמות התפוקה האפשריות מאפס עד אינסוף. הרווח במקרה זה שווה לאפס.

(3) התפוקה השולית של גורם ייצור A קטנה מהמחיר הריאלי של A ($MP_a < \frac{p_a}{p_x}$): במקרה

כזה הפדיון הצפוי מכל יחידת X קטן מעלות הייצור שלה. ייצור כל יחידת X כרוך בהפסד. הפירמה לא תהיה מעוניינת לייצר כלל. רווח הפירמה שווה לאפס.

מאחר שכאמור המקרה הראשון אינו אפשרי בשיווי-משקל תחרותי, אנו מסיקים בשלב זה כי בשיווי-משקל $MP_a^x \leq \frac{p_a}{p_x}$ וכי רווח הפירמה המייצרת X בשיווי-משקל תחרותי אכן שווה לאפס. מהצבת התפוקה השולית של גורם ייצור A ($MP_a = 2$) נקבל: $2p_x \leq p_a$.

ג. **תשובה סופית:** $\pi_y = \frac{p_y^2}{4p_a}$

הסבר: מאחר שהתפוקה השולית של גורם ייצור A בייצור Y פוחתת, הכמות האופטימלית של גורם הייצור נקבעת על-ידי השוויון: $MP_a^Y = \frac{p_a}{p_y}$

$$\pi_y = p_y \cdot y - p_a \cdot a_y = \frac{p_y^2}{4p_a} \quad \Leftrightarrow \quad y = a_y^{1/2} = \frac{p_y}{2p_a} \quad \Leftrightarrow \quad a_y = \frac{p_y^2}{4p_a^2}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 פונקציית הביקוש y פונקציית הביקוש a_y
 של Y של A

ד. **תשובה:**

משוואת התקציב של צרכן 2

$$p_x \cdot x_2 + p_y \cdot y_2 = 24p_a + \frac{p_y^2}{4p_a}$$

משוואת התקציב של צרכן 1

$$p_x \cdot x_1 + p_y \cdot y_1 = 24p_a$$

ה. **תשובה:**

פונקציות הביקוש של צרכן 2	פונקציות הביקוש של צרכן 1
פונקציות הביקוש של שני הצרכנים מתקבלות מאפיון הפתרון הפנימי של בעיית הצרכן (השקה בין עקומת אדישות לקו התקציב), כלומר: $\left\{ \begin{array}{l} MRS_{x,y}^i = \frac{y_i}{x_i} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y_i = \frac{p_x}{p_y} \cdot x_i \\ \text{משוואת התקציב של צרכן } i \end{array} \right.$	
$x_2 = \frac{24p_a + \frac{p_y^2}{4p_a}}{2p_x} = \frac{12p_a}{p_x} + \frac{p_y^2}{8p_a p_x}$ $y_2 = \frac{24p_a + \frac{p_y^2}{4p_a}}{2p_y} = \frac{12p_a}{p_y} + \frac{p_y}{8p_a}$	$x_1 = \frac{24p_a}{2p_x} = \frac{12p_a}{p_x}$ $y_1 = \frac{24p_a}{2p_y} = \frac{12p_a}{p_y}$

ו. **תשובה סופית: הטענה נכונה.**

הסבר: מפונקציות הביקוש של שני הצרכנים למצרך X משתמע כי שני הצרכנים מעוניינים לרכוש כמות חיובית של X בהינתן כל מערכת מחירים אפשרית (כלומר, בהינתן שכל המחירים חיוביים). מכאן כי בשיווי-משקל תחרותי מיוצרת כמות חיובית של X. על-פי סעיף ב' מצב כזה אפשרי רק כאשר $MP_a = \frac{p_a}{p_x}$, ומכאן: $p_a = 2p_x$.

ז. תשובה סופית:

יחס מחירים

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{16}$$

A	Y	X
כמות כוללת נתונה שווה 48	כמות מיוצרת כוללת שווה 4	כמות מיוצרת כוללת שווה 64
$a_y = 16$ $a_x = 32$	$y_2 = 2.5$ $y_1 = 1.5$	$x_2 = 40$ $x_1 = 24$

הסבר:

להלן משוואות שיווי-משקל בשלושת השווקים (שוקי המצרכים X ו-Y ושוק גורם הייצור A), לאחר הצבת השוויון: $p_a = 2p_x$ וסימון יחס המחרים $\frac{p_x}{p_y}$ ב- p בתוצאות שקיבלנו בסעיפים ג' ו-ה':

שוק	משוואת שיווי-משקל
X	$\underbrace{(24)}_{x_1} + \underbrace{\left(24 + \frac{1}{16p^2}\right)}_{x_2} = x$ הצרכה: הכמות המוצעת של x אינה מוגדרת היטב, מאחר שבשיווי-משקל פירמה x אדישה בין כל רמות התפוקה
Y	$\underbrace{(24p)}_{y_1} + \underbrace{\left(24p + \frac{1}{16p}\right)}_{y_2} = \underbrace{\left(\frac{1}{4p}\right)}_{\text{מתקבל מהצבת השוויון}}$ מתקבל מהצבת השוויון $p_a = 2p_x$ הביקוש של y העולה
A	$\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{a_x} + \underbrace{\left(\frac{1}{16p^2}\right)}_{a_y} = 48$ מתקבל מהצבת השוויון $p_a = 2p_x$ הביקוש של y פירמה y העולה A ייצור A העולה

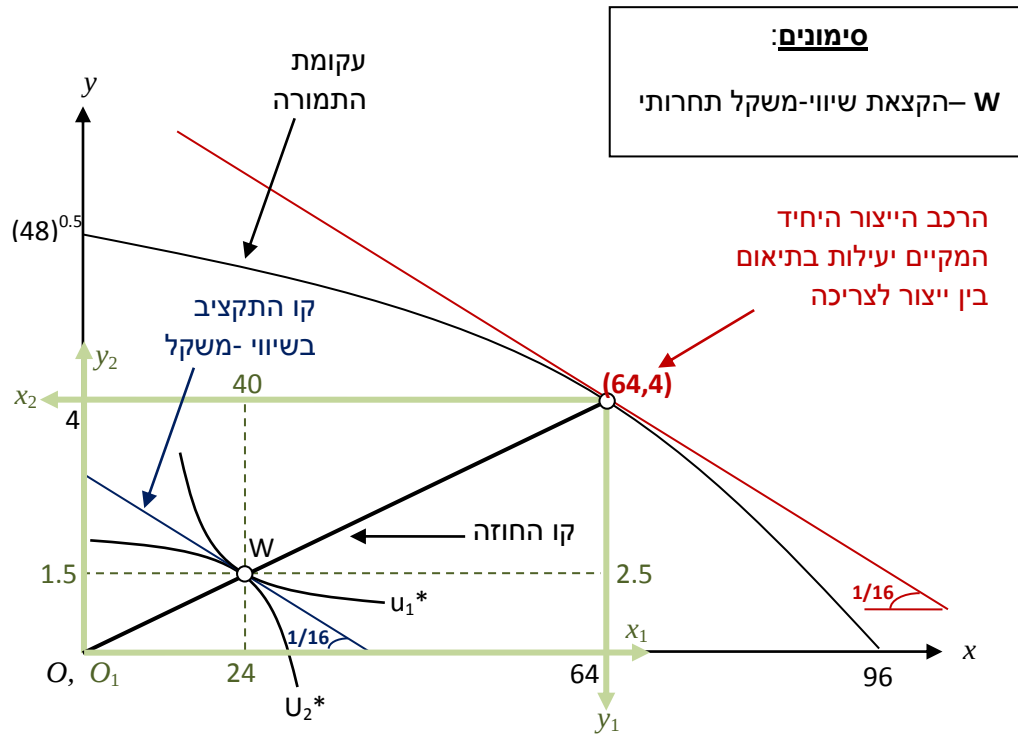
מפתרון משוואת שיווי-משקל בשוק Y נקבל כי יחס המצרכים בשיווי-משקל תחרותי הוא $p = \frac{1}{16}$. מהצבת ערך זה בפונקציות הביקוש לשני המצרכים נקבל: $x_1 = 24$, $y_1 = 1.5$, $x_2 = 40$, $y_2 = 2.5$.

ח. תשובה:

תנאי	תיאור	בדיקה
יעילות בייצור	הרכב הייצור של שיווי-משקל תחרותי $x = 64$, $y = 4$ נמצא על עקומת התמורה	משוואת עקומת התמורה היא: $\frac{1}{2}x + y^2 = 48$ הרכב הייצור של שיווי-משקל תחרותי מקיים משוואה זו
יעילות בצריכה	הקצאת שיווי-משקל תחרותי $y_1 = 1.5$, $x_1 = 24$, $y_2 = 2.5$, $x_2 = 40$ מקיימת את התנאים: $\begin{cases} MRS_{x,y}^1 = MRS_{x,y}^2 \\ x_1 + x_2 = x \\ y_1 + y_2 = y \end{cases}$	$\begin{cases} MRS_{x,y}^1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{1.5}{24} = \frac{1}{16} \\ MRS_{x,y}^2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{2.5}{40} = \frac{1}{16} \\ 24 + 40 = 64 \\ 1.5 + 2.5 = 4 \end{cases}$

$MRS_{x,y} = \frac{1}{16}$ $RPT_{x,y} = \frac{\frac{1}{2}}{2y} = \frac{1}{4y} = \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}$	$RPT_{x,y} = MRS_{x,y}$	תנאי התיאום
--	-------------------------	--------------------

שרטוט מסכם של שאלה 1:



שאלה 2

א. תשובה סופית: משוואת קו החוזה בייצור היא: $b_x = a_x$ (ובצורה שקולה: $b_y = a_y$)ב. תשובה סופית: משוואת עקומת התמורה היא: $x^2 + y = 18$

הסבר: חישוב משוואת עקומת התמורה מתבצע בשני שלבים:

שלב 1: הצבת קו החוזה בפונקציות הייצור וחיסוב הפונקציה ההופכית

$$x = a_x^{1/4} \cdot b_x^{1/4} = a_x^{1/4} \cdot a_x^{1/4} = a_x^{1/2} \rightarrow a_x = x^2$$

$$y = a_y^{1/2} \cdot b_y^{1/2} = a_y^{1/2} \cdot a_y^{1/2} = a_y \rightarrow a_y = y$$

הצבה מקו החוזה

שלב 2: הצבה במשוואת המשאבים ($a_x + a_y = \bar{a}$)

$$a_x + a_y = 18 \rightarrow x^2 + y = 18$$

הצבה

ג. תשובה סופית: $x=3, y=9, y_1=3x_1$

הסבר: להלן מפורטים שלושת התנאים ליעילות בתיאום המיושמים לנתוני השאלה:

תנאי	תיאור כללי	בנתוני השאלה
יעילות בצריכה	$\begin{cases} MRS_{x,y}^1 = MRS_{x,y}^2 \\ x_1 + x_2 = x \\ y_1 + y_2 = y \end{cases}$	$\begin{cases} MRS_{x,y}^1 = \frac{\frac{2}{3}y_1}{\frac{1}{3}x_1} = \frac{2y_1}{x_1} = \frac{2y_2}{x_2} = \frac{\frac{2}{3}y_2}{\frac{1}{3}x_2} = MRS_{x,y}^2 \\ x_1 + x_2 = x \Rightarrow x_2 = x - x_1 \\ y_1 + y_2 = y \Rightarrow y_2 = y - y_1 \end{cases}$ מפתרון מערכת המשוואות מתקבל כי: $y_1 = \frac{y}{x} x_1$
תנאי התיאום	$RPT_{x,y} = MRS_{x,y}$	$RPT_{x,y} = \frac{2x}{1} = 2x$ נחשב את MRS בהנחה שמתקיימת יעילות בצריכה, כלומר מתקיים התנאי $y_1 = \frac{y}{x} x_1$: $MRS_{x,y}^1 = \frac{2y_1}{x_1} = \frac{2 \cdot \frac{y}{x} x_1}{x_1} = 2 \frac{y}{x}$ כעת נשווה בין RPT ל-MRS ונקבל: $2 \frac{y}{x} = 2x \Rightarrow y = x^2$
יעילות בייצור	הרכב ייצור (x,y) נמצא על עקומת התמורה:	$x^2 + y = 18$ נציב במשוואת עקומת התמורה את השוויון $y = x^2$ ונקבל: $x = 3, y = 9$ נציב את כמויות X ו-Y בתנאי היעילות בצריכה $y_1 = \frac{y}{x} x_1$ ונקבל: $y_1 = 3x_1$
	באופן שקול, הקצאת גורמי הייצור נמצאת על קו החוצה בייצור:	$b_x = a_x$

ד. תשובה סופית: $\frac{p_a}{p_b} = 1, \frac{p_x}{p_y} = 6$

הסבר: עפ"י משפט הרווחה הראשון (המורחב למקרה של שיווי-משקל תחרותי כללי) אנו יודעים כי בשיווי-משקל מתקיימת יעילות בתיאום בין ייצור לצריכה ובפרט:

$$RPT_{x,y} = MRS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$$

יחס מחירי המצרכים בשיווי-משקל שווה ל-RPT בהרכב הייצור שמצאנו בסעיף הקודם

$$RPT_{x,y} = 2x = 2 \cdot 3 = 6: (x=3, y=9)$$

בנוסף, בשיווי-משקל תחרותי כללי מתקיים השוויון:

$$RTS_{a,b}^x = RTS_{a,b}^y = \frac{p_a}{p_b}$$

כלומר, יחס מחירי גורמי הייצור $\frac{p_a}{p_b}$ שווה לשיעור התחלופה לאורך קו החוצה בייצור $(b_x = a_x)$:

$$RTS_{a,b}^x = \frac{b_x}{a_x} = \frac{a_x}{a_x} = 1$$

שאלה 3

- א. **תשובה סופית:** משוואת קו החוצה בייצור היא: $b_x = 4a_x$ (ובצורה שקולה: $b_y = 4a_y$)
- ב. **תשובה סופית:** משוואת עקומת התמורה היא: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 10$
- ג. **תשובה סופית:** $x_2 = 0, y_2 = y, y_1 = 0, x_1 = x$ ומתקיימת משוואת עקומת התמורה $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 10$. במילים: חלוקה של כל הרכב ייצור על עקומת התמורה כך שצרכן 1 מקבל את כל ה-X וצרכן 2 מקבל את כל ה-Y היא יעילה בתיאום בין ייצור לצריכה.

הסבר: התוצאה מתקבלת מהשוואה בין שיעורי התחלופה הסובייקטיביים של הצרכנים ושיעור התחלופה בייצור X ו-Y על עקומת התמורה:

שיעור התחלופה השולי של צרכן 1 = 4 כלומר, צרכן 1 מעריך יחידת X כשוות ערך ל-4 יחידות Y

שיעור התחלופה השולי של צרכן 2 = 1 כלומר, צרכן 2 מעריך יחידת X כשוות ערך ל-1 יחידת Y

שיעור התחלופה השולי על עקומת התמורה (RPT) = 2 כלומר, עלות הייצור של יחידת X שווה ל-2 יחידות Y

מאחר שכל שיעורי התחלופה הם קבועים (פונקציות תועלת ליניאריות, עקומת התמורה ליניארית) אין כמובן כל טעם בשימוש במערכת המשוואות: $RPT_{x,y}^1 = MRS_{x,y}^1 = MRS_{x,y}^2$. אפיון אוסף ההקצאות המקיימות יעילות בתיאום בין ייצור וצריכה מתבסס במקרה זה על השוואת גודלם היחסי של שיעורי התחלופה והסקת מסקנות מתאימות:

- **צרכן 1:** מאחר ששיעור התחלופה השולי שלו גדול מ-RPT, חלוקה שבה צרכן 1 מקבל כמות חיובית ממצרף Y אינה יעילה פארטו:

תועלת	Y	X	מצב המוצא בו צרכן 1 צורך כמות חיובית של מצרף Y
$u_1^0 = 4x_1^0 + y_1^0$	y_1^0	x_1^0	
$u_1^1 = 4 \cdot \left(x_1^0 + \frac{y_1^0}{2} \right) + 0$ $u_1^1 = 4x_1^0 + 2y_1^0$	0	$x_1^0 + \frac{y_1^0}{2}$	מצב חדש בו כל כמות Y שנצרכה על-ידי צרכן 1 במצב המוצא מוחלפת ב-X בהתאם ליכולת הייצור של המשק

כף יחידת Y הומרה לחצי יחידת X

כתוצאה מהמרת Y ב-X חלה עלייה בתועלת של צרכן 1. תועלת צרכן 2 נותרה ללא שינוי מאחר שלא נעשה כל שינוי בסל שהוא צורך. מכאן שבמצב החדש שיפור פארטו ולפיכך מצב המוצא אינו יציף פארטו.

המסקנה הכללית הנובעת מהניתוח היא שבהקצאה יעילה בתיאום בין ייצור וצריכה

צרכן 1 צורך רק X.

- **צרכן 2:** מאחר ששיעור התחלופה השולי שלו קטן מ-RPT, חלוקה שבה הוא מקבל כמות חיובית ממצרף X אינה יעילה פארטו. כלומר, בהקצאה יעילה בתיאום בין ייצור וצריכה צרכן 2 צורך רק Y.

הערה: בתשובה הסופית מתוסף כמובן התנאי כי הרכב הייצור נמצא על עקומת התמורה – כלומר מתקיימת יעילות בייצור.

שאלה 4 (מרובת ברירה)

1. $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (1, 0, 1, 8)$ - תשובה לא נכונה כי צרכן 2 מקבל כמות חיובית של מצרף X. ניתן להביא לשיפור פארטו על-ידי העברת יחידה זו לצרכן 1. מצבו של צרכן 1 ישתפר בעוד שמצבו של צרכן 2 יישאר ללא שינוי.
2. $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (10, 10, 0, 0)$ - תשובה לא נכונה. חלוקה כזו כלל אינה אפשרית על-פי משוואת עקומת התמורה.
3. $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 0, 10)$ - תשובה נכונה
4. לא ניתן לקבוע ללא מידע מדויק אודות פונקציות התועלת של הצרכנים – תשובה לא נכונה. ניתן לאפיין את אוסף החלוקות המקיימות יעילות בתיאום בין ייצור לצריכה (תוצאה דומה לזו שקיבלנו בשאלה 3)
5. כל התשובות האחרות אינן נכונות