

פתרון תרגיל 2 תשע"ה: שיווי-משקל תחרותי בכלכלת חליפין

שאלה 1 (המשך שאלה 1 בתרגיל 1)

א. להלן פונקציות הביקוש של שני הצרכנים:

תשובה סופית:

- $x_1^*(p) = \alpha \left(5 + \frac{30}{p} \right)$
- $y_1^*(p) = (1 - \alpha) \cdot (5p + 30)$
- $x_2^*(p) = \alpha \cdot \left(15 + \frac{10}{p} \right)$
- $y_2^*(p) = (1 - \alpha) \cdot (15p + 10)$

הסבר: פונקציות הביקוש של צרכן i מתארות את הסל האופטימלי מבחינתו לכל קבוצת תקציב אפשרית. בהקשר של כלכלת חליפין (ללא התערבות ממשלתית), קבוצת התקציב נקבעת על-פי יחס מחירי המצרכים $p = p_x / p_y$ והסל התחילי של הצרכן. בהינתן מחירי המצרכים (p_x, p_y)

והסל התחילי של צרכן i , $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, משוואת התקציב של צרכן i היא:

$$p_x x_i + p_y y_i = p_x \bar{x}_i + p_y \bar{y}_i$$

נחלק את שני האגפים ב- p_y ונקבל:

$$\underbrace{\left(\frac{p_x}{p_y} \right) x_i + y_i}_{\text{נסמך } p\text{-י}} = \underbrace{\left(\frac{p_x}{p_y} \right) \bar{x}_i + \bar{y}_i}_{\text{נסמך } p\text{-י}}$$

זהו נוסח משוואת התקציב בו
נצעה שימוש בהמשך

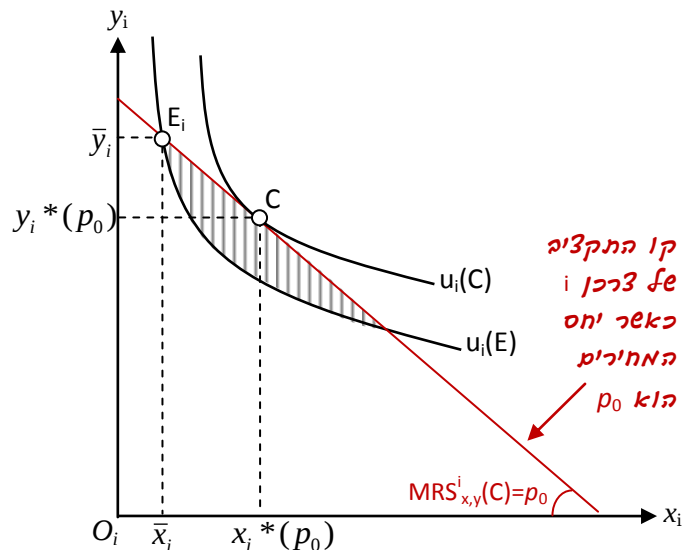
$$p x_i + y_i = p \bar{x}_i + \bar{y}_i$$

תזכורת ממחרים א': כאשר יחס ההעדפה של הצרכן מונוטוני ועקומות האדישות שלו קמורות ממש כלפי הראשית, סל אופטימאלי פנימי מתקבל בהשקה בין קו התקציב ועקומת אדישות.¹ התנאים האלגבריים המאפיינים השקה הם:

$$\begin{cases} MRS_{x,y}^i = p \\ px_i + y_i = p\bar{x}_i + \bar{y}_i \end{cases}$$

אפיון הפתרון הפנימי של הצרכן

סימונים:
E_i – הסל התחילי של צרכן i
C – הסל האופטימאלי של צרכן i בקבוצת התקציב הנתונה
השטח המקווקו – קבוצת הסלים שעדיפים מבחינת צרכן i על-פני הסל התחילי שלו ושפשריים בקבוצת התקציב הנתונה



ניעזר באפיון הפתרון הפנימי של בעיית הצרכן על מנת לחשב את פונקציות הביקוש של שני הצרכנים:

$$\begin{aligned} & \underbrace{px_i + p \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot x_i}_{\substack{1 \text{ } px_i \cdot \left(1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right) \\ 2 \text{ } \frac{1}{\alpha}}} = p\bar{x}_i + \bar{y}_i \quad \leftarrow \begin{cases} MRS_{x,y}^i = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{y_i}{x_i} = p \Rightarrow y_i = p \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot x_i \\ px_i + y_i = p\bar{x}_i + \bar{y}_i \end{cases} \quad \text{הצבה} \\ & \underbrace{px_i}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{2} = \underbrace{p\bar{x}_i + \bar{y}_i}_{3} \Rightarrow \underbrace{x_i^*(p)}_{\substack{\text{פונקציית הביקוש} \\ \text{ל-} x \text{ של צרכן } i}} = \alpha \cdot \left(\bar{x}_i + \frac{\bar{y}_i}{p} \right) \quad \underbrace{y_i^*(p)}_{\substack{\text{פונקציית הביקוש} \\ \text{ל-} y \text{ של צרכן } i}} = p \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot x_i = (1-\alpha) \cdot (\bar{x}_i p + \bar{y}_i) \end{aligned}$$

פונקציות הביקוש הסופיות שמופיעות בחלק הראשון של התשובה מתקבלות על-ידי הצבת הסלים התחיליים הספציפיים של שני הצרכנים בפונקציות הביקוש הכלליות שקיבלנו.

¹ נדגיש כי קיום מונוטוניות וקמירות ממש של עקומות האדישות כלפי הראשית אינם מבטיחים כי הסל האופטימאלי הוא אכן פנימי.

ב.

תשובה סופית:

- יחס מחירים של שיווי-משקל

$$p^* = \frac{2\alpha}{1-\alpha} - \text{תחרותי}$$

- הקצאת שיווי-משקל תחרותי:

- $x_1^*(p^*) = 15 - 10\alpha$
- $y_1^*(p) = 30 - 20\alpha$
- $x_2^*(p) = 5 + 10\alpha$
- $y_2^*(p) = 10 + 20\alpha$

הסבר: שיווי-משקל תחרותי מתקבל כאשר:

הצרכה: כל יחס מחירים המביא

לפקיות משוואת ש"מ בשוק x

מביא גם לש"מ בשוק y

(ולדפק) - "חוק ולראס"

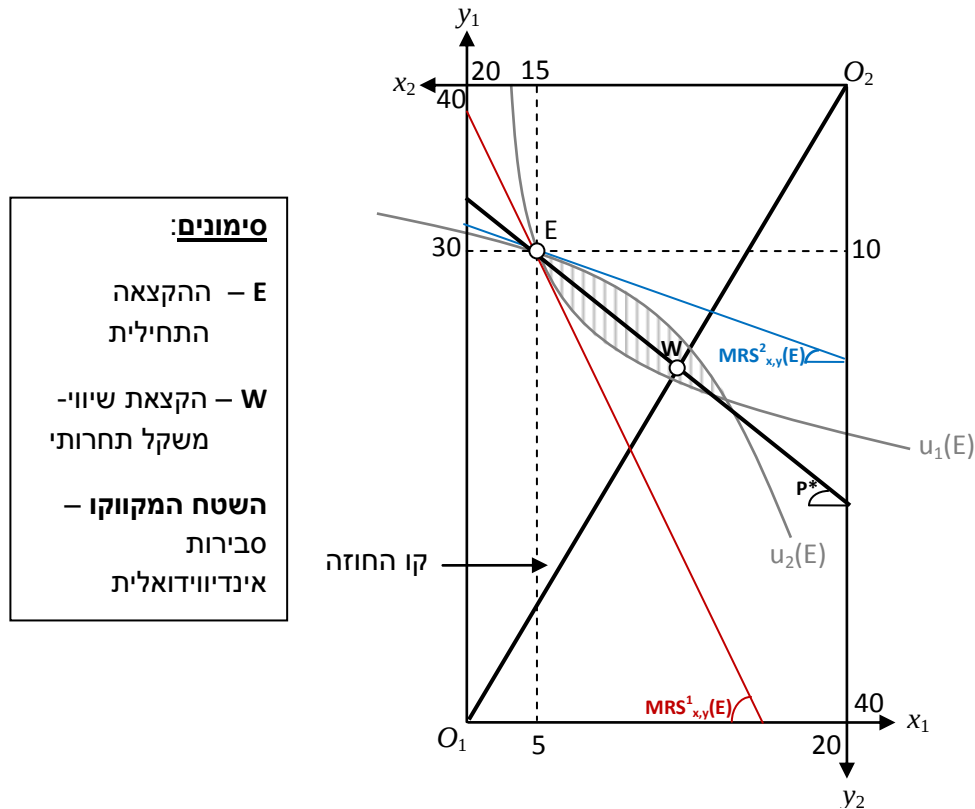
כאשר קיימים שני שווקים בלבד

$$\begin{cases} x_1^*(p) + x_2^*(p) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \\ y_1^*(p) + y_2^*(p) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \end{cases}$$

נציב את פונקציות הביקוש שקיבלנו בסעיף הקודם ונקבל:

$$\begin{array}{l} \text{יחס המחירים} \\ \text{בשיווי-משקל} \\ \text{תחרותי} \end{array} \quad \boxed{p^* = \frac{2\alpha}{1-\alpha}} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \left(5 + \frac{30}{p} \right) + \alpha \left(15 + \frac{10}{p} \right) = 5 + 15 \\ (1-\alpha) \cdot (5p + 30) + (1-\alpha) \cdot (15p + 10) = 30 + 10 \end{cases}$$

נציב את יחס המחירים של שיווי-משקל תחרותי בפונקציות הביקוש שקיבלנו בסעיף הקודם ונקבל את התוצאה הסופית המופיעה בתחילת התשובה.



ג. **תשובה סופית:** הממשלה צריכה לחלק את המשאבים באופן שיקיים את המשוואה:

$$6x_i + y_i = 80$$

לתוצאה המבוקשת (לדוגמה: ההקצאה C - $x_1 = 8, y_1 = 32, x_2 = 12, y_2 = 8$).

הסבר: השאלה מבוססת על משפט הרווחה השני. על-פי המשפט, ניתן להביא למימוש כל הקצאה פנימית שהיא יעילה פארטו כהקצאת שיווי-משקל תחרותי, בתנאי שעקומות האדישות של שני הצרכנים קמורות ממש לראשית. נשים לב כי על-פי נתוני השאלה, ההקצאה השוויונית אכן יעילה (נזכיר כי קו החוצה הוא אלכסון התיבה עבור כל ערך של α) ועקומות האדישות של שני הצרכנים קמורות ממש לראשית (למעט ברמת תועלת אפס שאינה רלוונטית לשאלה הנוכחית). מימוש הקצאה פנימית יעילה פארטו כהקצאת שיווי-משקל תחרותי מתבצע על-ידי חלוקה מחדש של המשאבים התחיליים כך שתתקבל הקצאה תחילית חדשה הנמצאת על המשיק המשותף העובר דרך ההקצאה הסופית אליה מעוניינים בסופו של דבר לעבור (במקרה הנוכחי – ההקצאה M). המשיק המשותף הוא למעשה קו התקציב שיתקבל בשיווי-משקל תחרותי בהינתן ההקצאה התחילית החדשה.

חישוב משוואת קו התקציב (המשיק המשותף) העובר ב-M:

(1) יחס המחרים = שיעור התחלופה השולי בצריכה בנקודה M:

$$MRS^i_{x,y}(M) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{y_i}{x_i} = \frac{0.75}{(1-0.75)} \cdot \frac{20}{10} = 6$$

$y_i(M)=20, x_i(M)=10, \alpha=0.75$ **הצבה:**

יחס המחרים פשוט-המקובל

(2) נקודה בה עובר קו התקציב – ההקצאה המבוקשת M בה $x_i = 10, y_i = 20$

נציב את השיפוע ואת ערכי הנקודה במשוואת קו התקציב הכללית ונקבל את התוצאה המבוקשת:

הסבר כללי: כאשר פונקציות התועלת של שני הצרכנים הן ליניאריות (MRS קבוע), אפיון הסל האופטימאלי של כל צרכן תלוי בגודל היחסי של יחס המחירים - p (=עלות יחידת X במונחי Y) ושיעור התחלופה השולי של הצרכן - MRS (=שווי סובייקטיבי של יחידת X במונחי Y). אפיון הסל האופטימאלי נחלק לשלושה מקרים:

- (1) $p < MRS$ – במקרה זה הצרכן מעוניין לצרוך כמות מקסימאלית של X , ולא לצרוך כלל Y . כלומר הסל האופטימאלי של הצרכן הוא סל פינתי בו הוא מוציא את מלוא הכנסתו על צריכת X .
- (2) $p = MRS$ – במקרה זה כל סל על קו התקציב של הצרכן הוא אופטימאלי, כך שישנם אינסוף סלים אופטימאליים שהצרכן אדיש ביניהם.
- (3) $p > MRS$ – במקרה זה הצרכן מעוניין לצרוך כמות מקסימאלית של Y , ולא לצרוך כלל X . כלומר הסל האופטימאלי של הצרכן הוא סל פינתי בו הוא מוציא את מלוא הכנסתו על צריכת Y .

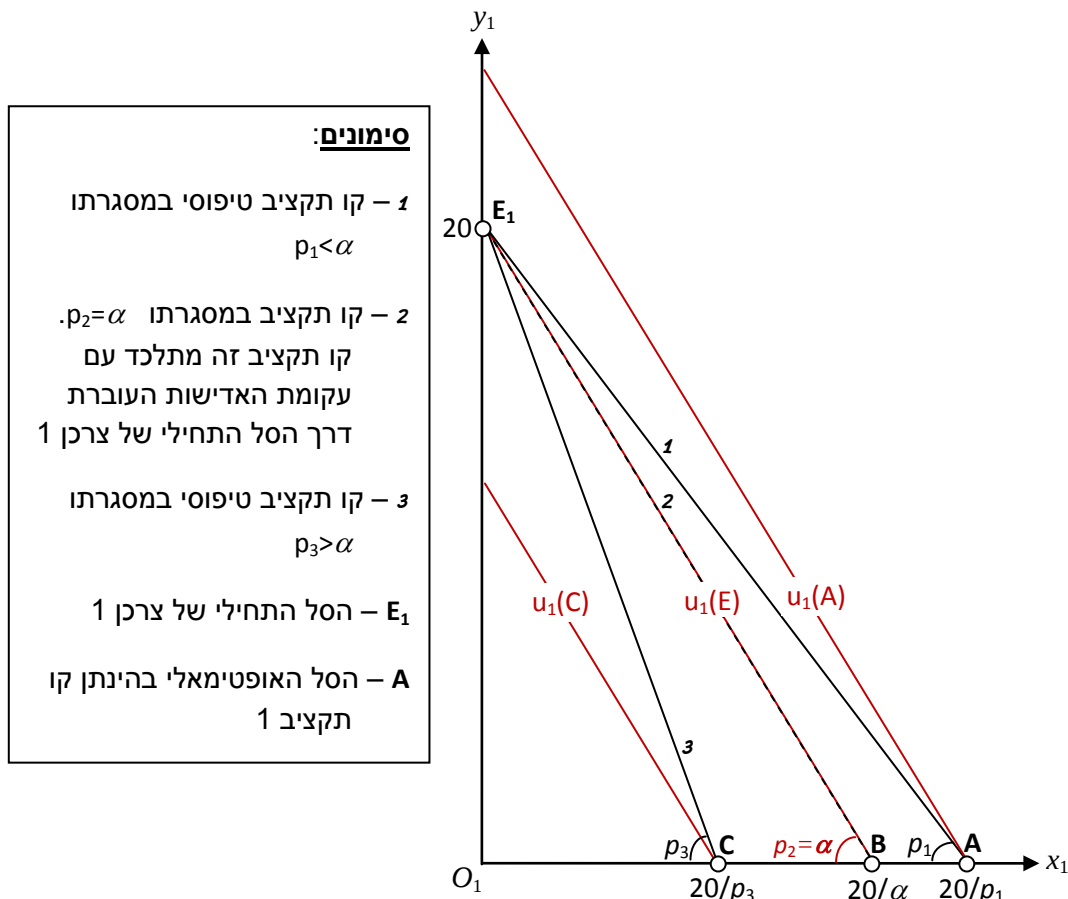
פונקציית הביקוש של צרכן 1

משוואת התקציב של צרכן 1 היא: $px_1 + y_1 = 20$

שיעור התחלופה השולי של צרכן 1 $\alpha = 1$

על-פי ההסבר הכללי, ניתן להבחין בין שלושה מקרים:

- (1) $p < \alpha$ – הצרכן מוציא את מלוא הכנסתו על X $\Leftrightarrow y_1 = 0, x_1 = 20/p$.
- (2) $p = \alpha$ – במקרה זה כל סל על קו התקציב של הצרכן הוא אופטימאלי $\Leftrightarrow y_1 \in [0, 20]$, $x_1 \in [0, 20/\alpha]$ ומתקיימת משוואת התקציב: $px_1 + y_1 = 20$.
- (3) $p > \alpha$ – הצרכן מוציא את מלוא הכנסתו על Y $\Leftrightarrow x_1 = 0, y_1 = 20$. למעשה הסל האופטימאלי של הצרכן הוא הסל התחילי שלו (E_1 בשרטוט).



פונקציית הביקוש של צרכן 2

משוואת התקציב של צרכן 2 היא: $px_2 + y_2 = 10p$

שיעור התחלופה השולי של צרכן 2 $\beta =$

על-פי ההסבר הכללי, ניתן להבחין בין שלושה מקרים:

(1) $p \leq \beta$ - הצרכן מוציא את מלוא הכנסתו על x , $y_2 = 0$, $x_2 = 10$. למעשה הסל

האופטימאלי של הצרכן הוא הסל התחילי שלו.

(2) $p = \beta$ - במקרה זה כל סל על קו התקציב של הצרכן הוא אופטימאלי $y_2 \in [0, 10p]$

$x_2 \in [0, 10]$, ומתקיימת משוואת התקציב: $px_2 + y_2 = 10p$.

(3) $p > \beta$ - הצרכן מוציא את מלוא הכנסתו על y , $x_1 = 0$, $y_1 = 20$. למעשה הסל

האופטימאלי של הצרכן הוא הסל התחילי שלו (E_1).

ב. **תשובה סופית:** $\beta \leq 2 \leq \alpha$ (כאשר לכל היותר אחד משני אי-השוויונות יכול להתקיים בשוויון

בגלל נתון השאלה לפיו $\alpha > \beta$).

הסבר: תחילה נסביר מדוע בנתוני השאלה, שיווי-משקל תחרותי יכול להתקיים רק כאשר $\beta \leq p \leq \alpha$. לצורך זה נבחן (ונפסול) את שני המקרים האחרים:

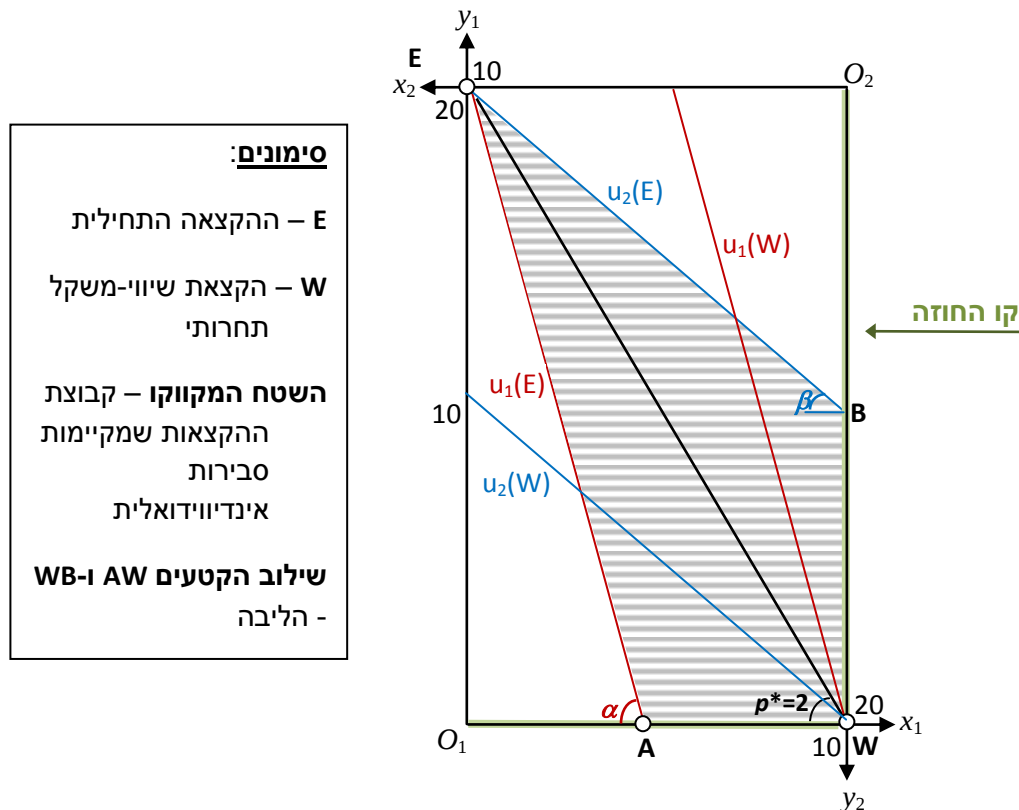
- $p > \alpha (> \beta)$ - במקרה זה שני הצרכנים מעוניינים לצרוך רק y ולפיכך נוצר עודף ביקוש ל- y ועודף היצע ל- x (צרכן 2 מעוניין למכור את כל ה- x שברשותו, אך צרכן 1 אינו מעוניין לרכוש).
- $p < \beta (< \alpha)$ - במקרה זה שני הצרכנים מעוניינים לצרוך רק x ולפיכך נוצר עודף ביקוש ל- x ועודף היצע ל- y (צרכן 1 מעוניין למכור את כל ה- y שברשותו, אך צרכן 2 אינו מעוניין לרכוש).

נבחן את המקרה בו $\beta < p < \alpha$. במקרה זה, צרכן 1 מעוניין לצרוך רק X וצרכן 2 מעוניין לצרוך רק Y. שיווי-משקל תחרותי מתקבל כאשר:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (20/p) + 0 = 0 + 10 \\ 0 + 10p = 20 + 0 \end{cases} \boxed{p=2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^*(p) + x_2^*(p) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \\ y_1^*(p) + y_2^*(p) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \end{cases}$$

שילוב התנאים $\beta < p < \alpha$ ו- $p=2$ מביא לקבלת התוצאה הסופית. נשים לב שהקצאת שיווי-משקל תחרותי W מתקבלת בפינה הימנית התחתונה של תיבת אדג'וורת' בה:

$$x_1^* = 10, y_1^* = 0, x_2^* = 0, y_2^* = 20$$



הערה: כאשר אחד מאי-השוויונות החזקים מוחלף בשוויון (כדוגמת $\beta < 2 = \alpha$), יחס המחרים של שיווי-משקל תחרותי והקצאת שיווי-משקל תחרותי נשארים ללא שינוי. ההבדל היחיד הוא שבמקרה זה, צרכן 1 אדיש בין כל הסלים על קו התקציב שלו, כך שהסל שהוא צורך בשיווי-משקל תחרותי הוא אחד מתוך אינסוף סלים אופטימליים מבחינתו.

שאלה 3

תשובה סופית: $p = 2$, הקצאת שיווי-משקל תחרותי: $x_1^* = 6, x_2^* = 6, y_1^* = 11, y_2^* = 12$

הסבר: נחשב תחילה את פונקציות הביקוש של הצרכנים.

פונקצית הביקוש של צרכן 1

$$px_1 + (p \cdot x_1 - 1) = 4p + 15 \Leftrightarrow \begin{cases} MRS_{x,y}^1 = \frac{y_1 + 1}{x_1} = p \Rightarrow y_1 = p \cdot x_1 - 1 \\ px_1 + y_1 = 4p + 15 \end{cases}$$

$$\text{ומכאן: } x_1^*(p) = 2 + \frac{8}{p}, y_1^*(p) = 2p + 7$$

פונקצית הביקוש של צרכן 2

$$px_2 + p \cdot x_2 = 8p + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} MRS_{x,y}^2 = \frac{y_2}{x_2} = p \Rightarrow y_2 = p \cdot x_2 \\ px_2 + y_2 = 8p + 8 \end{cases}$$

$$\text{ומכאן: } x_2^*(p) = 4 + \frac{4}{p}, y_2^*(p) = 4p + 4$$

שיווי-משקל תחרותי מתקבל כאשר:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 + 8/p) + (4 + 4/p) = 4 + 8 \\ (2p + 7) + (4p + 4) = 15 + 8 \end{cases} \boxed{p=2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^*(p) + x_2^*(p) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \\ y_1^*(p) + y_2^*(p) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \end{cases}$$

הקצאת שיווי-משקל תחרותי מתקבלת על-ידי $p=2$ בפונקציות הביקוש של הצרכנים.

שאלה 4

תשובה: לא ייתכן כי הקצאת שיווי-משקל תחרותי היא הוגנת. מנתוני השאלה משתמע כי ההקצאה

התחילית היא גם הקצאת שיווי-משקל תחרותי (קו התקציב בשיווי-משקל תחרותי הוא המשיק המשותף העובר דרך ההקצאה התחילית). מאחר שההקצאה התחילית אינה הוגנת, כך גם הקצאת שיווי-משקל תחרותי.

שאלה 5

א. **תשובה:** הטענה לא נכונה. הקצאה תחילית שוויונית תהיה גם הקצאת שיווי-משקל תחרותי רק במקרים בהם היא יעילה פארטו.

ב. **תשובה:** הטענה נכונה. על-פי השוויון הנתון, בשיווי-משקל תחרותי הערך הכספי של הסל התחילי של צרכן 1 שווה לערך הכספי של הסל התחילי של צרכן 2. לפיכך קבוצות התקציב של שני הצרכנים זהות. במצב כזה, כל סל שנבחר על ידי צרכן 1, אפשרי מבחינתו של צרכן 2 (ולהפך). מאחר שהסל הנבחר על-ידי כל צרכן הוא אופטימאלי מבחינתו בקבוצת התקציב שלו,

מובטח שצרכן 1 אינו מעדיף את הסל שנבחר על-ידי צרכן 2 על הסל שהוא עצמו בחר (ולהפך).
הצרכנים אינם מקנאים זה בזה ולפיכך הקצאת שיווי-משקל תחרותי הוגנת.