

פתרון תרגיל 1 תשע"ה: תכונות של הקצאות בכלכלת חליפין

שאלה 1

א. **תשובה סופית:** ניסוח אלגברי של קו החוזה - $y_1 = 2x_1$ (ללא תלות בערך של α); גרפית - קו

החוזה הוא אלכסון תיבת אדג'וורת (ראה שרטוט בתשובה לסעיף ב')

הסבר: מאחר שעקומות האדישות של שני הצרכנים קמורות ממש לראשית (בכל רמת תועלת חיובית)¹, ניתן להשתמש באפיון הקצאות יעילות פנימיות (= השקה בין עקומות האדישות של הצרכנים בתיבת אדג'וורת):

שיפוע אלכסון $\frac{y}{x} = \frac{40}{20} = 2$ סה"כ $\frac{y}{x} = 2$ תחת אדג'וורת

$$\begin{cases} MRS^1_{x,y} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{y_1}{x_1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{y_2}{x_2} = MRS^2_{x,y} \\ x_1 + x_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 20 \rightarrow x_2 = 20 - x_1 \\ y_1 + y_2 = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 40 \rightarrow y_2 = 40 - y_1 \end{cases}$$

הצבה

$$\underline{y_1 = 2x_1} \leftarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{40 - y_1}{20 - x_1}$$

הכללת התוצאה: (*) כאשר העדפות שני הצרכנים מיוצגות על-ידי פונקציות תועלת מסוג קוב-דגלאס, כך ש:

$$u_1 = x_1^{\alpha_1} \cdot y_1^{\beta_1}$$

$$u_2 = x_2^{\alpha_2} \cdot y_2^{\beta_2}$$

ובנוסף מתקיים כי יחסי החזקות של שני הצרכנים שווים, כלומר:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

אז קו החוזה הוא אלכסון תיבת אדג'וורת והוא מתואר על-ידי המשוואה:

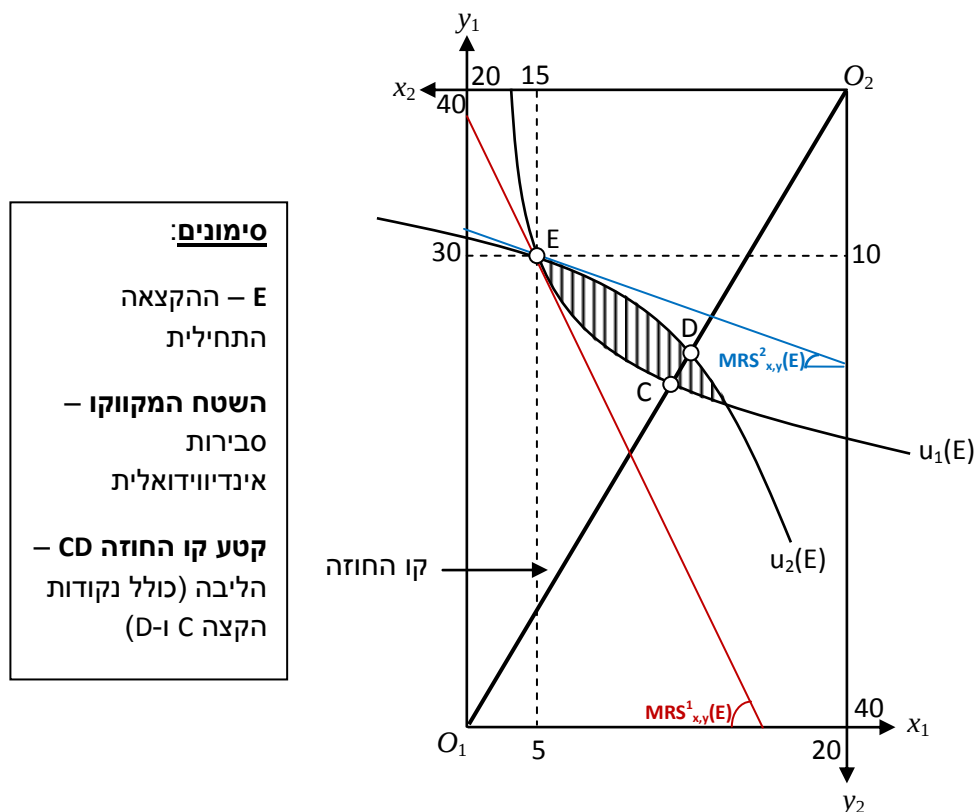
$$y_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \cdot x_1$$

(*) למעשה, ניתן להכליל את התוצאה לא רק לפונקציות קוב-דגלאס עם יחסי חזקות זהים, אלא לכל המקרים בהם יחסי ההעדפה של הצרכנים זהים, הומוטתיים (טכנית: שיעור התחלופה השולי - MRS - קבוע לאורך כל קרן מהראשית), ועקומות האדישות שלהם

קמורות ממש (לדוגמה: $u_2 = 3x_2^{0.5} + 3y_2^{0.5}$, $u_1 = x_1^{0.5} + y_1^{0.5}$).

¹ ברמת תועלת אפס, עקומות האדישות של שני הצרכנים מתלכדות עם הצירים ולכן הן אינן קמורות ממש (אלא רק במובן החלש). ואולם, תכונה זו של עקומות האדישות אינה משפיעה על פתרון השאלה.

ב. שרטוט:



הערה 1: כפי שניתן לראות שרטוט, עקומות האדישות של שני הצרכנים שעוברות בנקודה E המייצגת את ההקצאה התחילית חותכות זו את זו, כלומר שיעורי התחלופה השוליים של שני הצרכנים שונים (זה מזה). יתר על כן, נראה בשרטוט כי $MRS^1_{x,y} > MRS^2_{x,y}$. ואכן על-פי חישוב נקבל כי בהקצאה התחילית:

$$MRS^1_{x,y}(E) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{y_1}{x_1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{30}{5} = 6 \frac{\alpha}{(1-\alpha)}$$

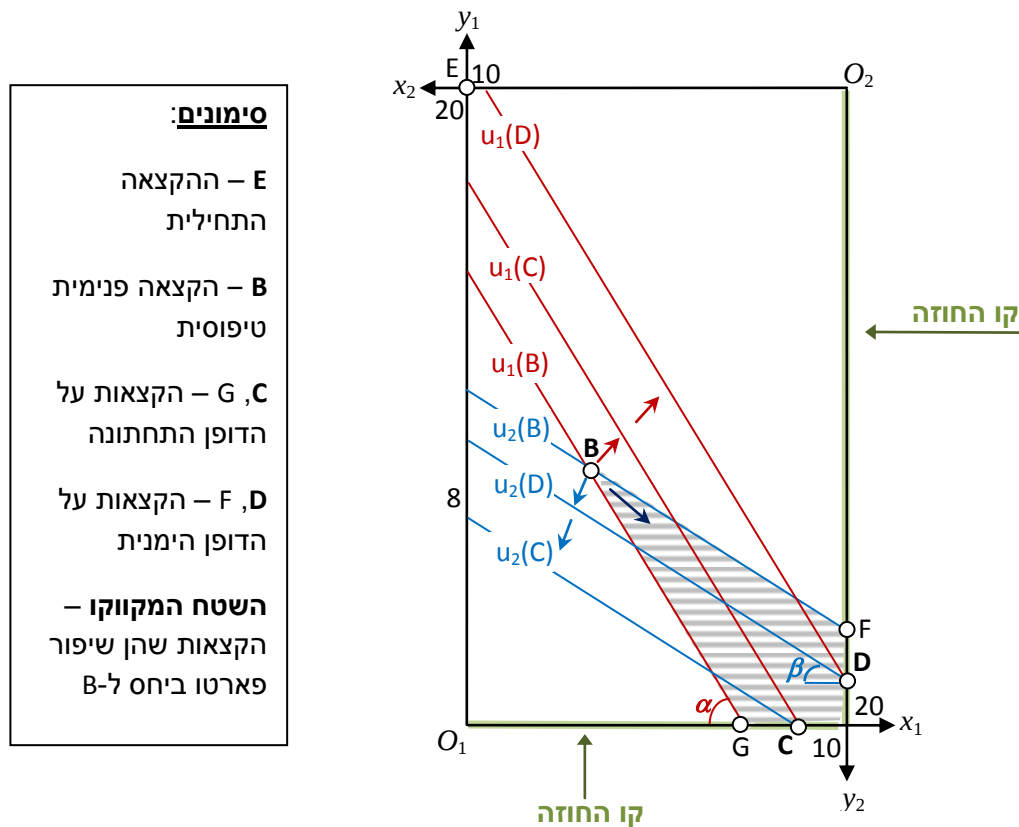
$$MRS^2_{x,y}(E) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{(1-\alpha)}$$

הערה 2: כפי שראינו בסעיף א', קו החוצה אינו תלוי בערכו של α . לעומת זאת, הצורה של עקומות האדישות תלויה בערך זה (כאשר $\alpha \rightarrow 0$, צורת עקומות האדישות שואפת בגבול לאופקית. לעומת זאת, כאשר $\alpha \rightarrow 1$, צורת עקומות האדישות שואפת בגבול לאנכית). לפיכך הליבה תלויה בערך של α

ג. כאשר פונקציות התועלת של שני הצרכנים מוגדרות היטב בתיבת אדג'וורת ורציפות, הליבה בהכרח אינה ריקה. בקורס אנו נתמקד רק בפונקציות תועלת המקיימות דרישות אלה.

שאלה 2

א. **תשובה סופית:** קו החוצה הוא הדופן התחתונה + הדופן הימנית של תיבת אדג'וורת.



הסבר גרפי: נבחן שלוש הקצאות טיפוסיות: B (פנימית), C (דופן תחתונה) ו-D (דופן ימנית), ונתאר בשרטוט את עקומות האדישות העוברות דרכן (של צרכן 1 באדום ושל צרכן 2 בתכלת). בהתאם לנתוני השאלה, עקומות האדישות של שני הצרכנים הן ליניאריות ושיפוע עקומות האדישות של צרכן 1 (α) גדול משיפוע עקומות האדישות של צרכן 2 (β). על-פי השרטוט ניתן לראות כי:

- **B אינה יעילה פארטו:** זאת מאחר שעקומות האדישות העוברות דרכה חותכות זו את זו, כך שנוצר שטח (השטח המקווקו) המייצג הקצאות שהן שיפור פארטו ביחס ל-B. כך למשל, מעבר מ-B ל-C או ל-D מביא לשיפור פארטו מאחר שהוא מייטיב את מצב שני הצרכנים. בדומה ל-B כל ההקצאות הפנימיות אינן יעילות פארטו.
- **C יעילה פארטו** מאחר שאין אפשרות לשיפור פארטו ביחס להקצאה C. ניתן לחלק את התיבה לשלושה אזורים עיקריים ביחס ל-C:
 - **אזור 1 – מעל עקומת האדישות של צרכן 1 העוברת דרך C** מעבר מ-C לכל הקצאה באזור זה (דוגמת הקצאה D) מביא אמנם להטבה במצבו של צרכן 1, אך מרע את מצבו של צרכן 2.
 - **אזור 2 – מתחת עקומת האדישות של צרכן 2 העוברת דרך C** מעבר מ-C לכל הקצאה שנמצאת באזור זה (דוגמת הקצאה G) מביא אמנם להטבה במצבו של צרכן 2, אך להרעה במצבו של צרכן 1.

- אזור 3 – בין עקומות האדישות של שני הצרכנים העוברות דרך C מעבר מ-C לכל הקצאה שנמצאת באזור זה (דוגמת הקצאה B) מביא להרעה במצב שני הצרכנים.

בדומה ל-C כל ההקצאות על הדופן התחתונה של תיבת אדג'וורת הן יעילות פארטו.

- **D יעילה פארטו** וכך גם כל ההקצאות על הדופן הימנית יעילות פארטו (הסבר כמו לגבי C).

הסבר כלכלי (עסקאות חליפין משפרות): לשם פשטות, נניח כי $\alpha=5$ ו- $\beta=3$. בהתאם, שיעור התחלופה השולי של צרכן 1 שווה 5 ושיעור התחלופה השולי של צרכן 2 שווה 3. נזכיר כי שיעור התחלופה השולי מציין את השווי הסובייקטיבי שמייחס הצרכן ליחידת X במונחי יחידות Y. **כאשר שיעורי התחלופה של שני הצרכנים שונים זה מזה הם יכולים לבצע עסקת חליפין ביניהם שתביא להטבה במצב שניהם, כל עוד יש להם די משאבים לביצוע העסקה.** נכנה עסקה כזו "עסקת חליפין משפרת". מאחר שעל-פי הנתונים צרכן 1 מייחס ערך גדול יותר ליחידת X (5 יחידות Y לעומת 3 של צרכן 2), עסקת חליפין משפרת היא כזו שבמסגרתה: (א) צרכן 1 מקבל עוד X בתמורה ל-Y; (ב) יחס החליפין בעסקה, P, הוא בין 3 ל-5.

ניתוח עסקת חליפין משפרת

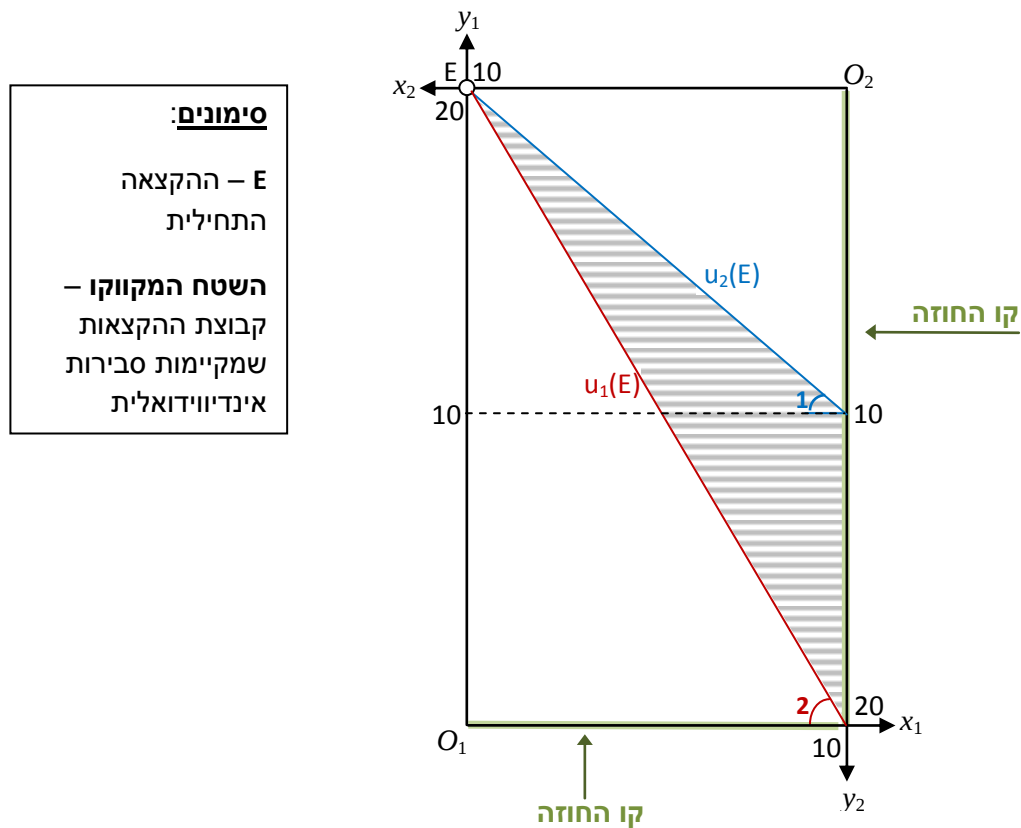
צרכן 2		צרכן 1	
מוותר	מקבל	מוותר	מקבל
יחידת X	P יחידות Y	P יחידות Y	יחידת X
(ש"ע ל-3 יחידות Y)	$3 < P < 5$	$3 < P < 5$	(ש"ע ל-5 יחידות Y)
רווח (במונחי Y)		רווח (במונחי Y)	
$P-3 > 0$		$5-P > 0$	

אפיון ההקצאות היעילות פארטו

בהקצאות יעילות פארטו אין לאחד הצרכנים (או לשניהם) די משאבים לביצוע עסקת חליפין משפרת. הקצאות כאלה הן:

- הקצאות שבהן אין לצרכן 1 ממצרך Y ($y_1 = 0$) – הקצאות אלה מהוות את **הדופן התחתונה** של תיבת אדג'וורת.
- הקצאות שבהן אין לצרכן 2 ממצרך X ($x_2 = 0$) – הקצאות אלה מהוות את **הדופן הימנית** של תיבת אדג'וורת.

ב. שרטוט:

ג. **תשובה סופית:** מצב כזה אינו ייתכן בנתוני השאלה.**הסבר אלגברי:** נבחן את התנאים להיעדר קנאה בהקצאה E:

- התועלת של צרכן 1 מהסל שלו בהקצאה E גדולה מ- או שווה לתועלתו מהסל של צרכן 2 - $u_1(0,20) \geq u_1(10,0)$

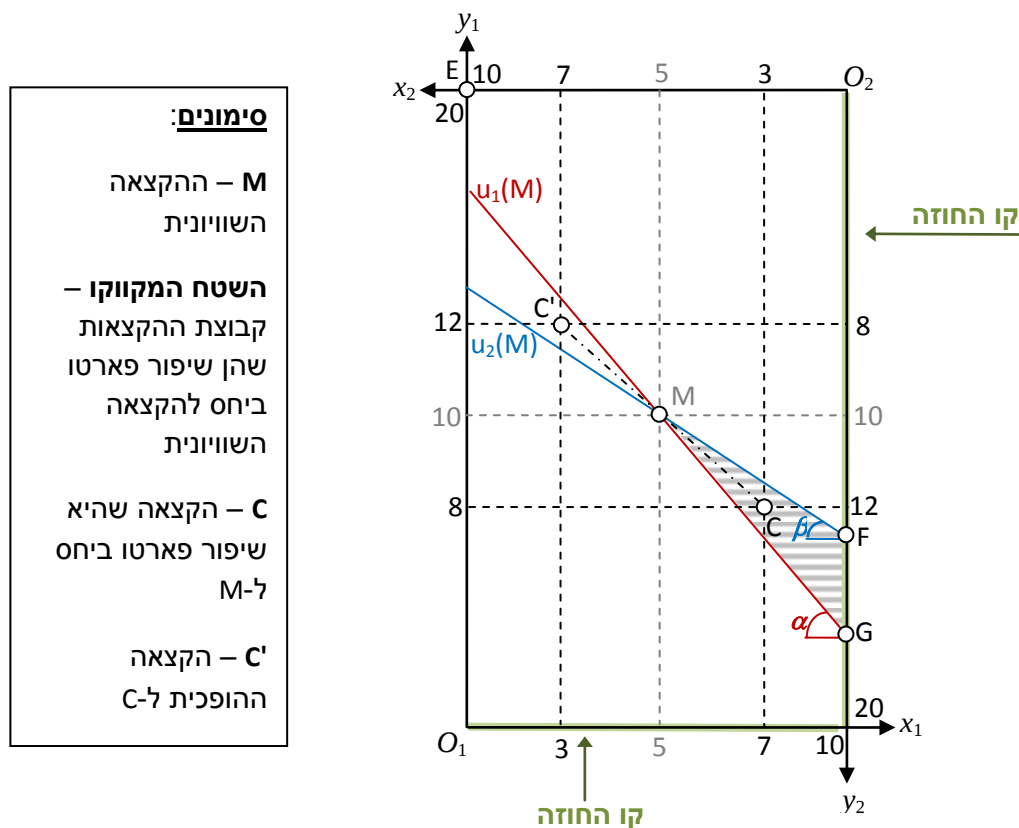
$$\alpha \leq 2 \Leftrightarrow 20 \geq 10\alpha$$

מתקבלת
סתירה מאחר
שעל-פי נתוני
השאלה $\alpha > \beta$

- התועלת של צרכן 2 מהסל שלו בהקצאה E גדולה מ- או שווה לתועלתו מהסל של צרכן 1 - $u_2(10,0) \geq u_2(0,20)$

$$\beta \geq 2 \Leftrightarrow 10\beta \geq 20$$

7. תשובה סופית: הטענה נכונה ולהלן השרטוט.



הסבר: נבחן הקצאה שהיא שיפור פארטו ביחס להקצאה השוויונית M, למשל C. רמות התועלת של שני הצרכנים ב-C גדולות מאלה שבהקצאה M. נבדוק האם אחד הצרכנים (או שניהם) מקנאים בצרכן האחר. לשם כך, נוסיף לשרטוט את ההקצאה המתקבלת מהחלפת הסלים בין הצרכנים – ההקצאה ההופכית C'. חשוב לשים לב כי C' סימטרית ל-C ביחס למרכז של תיבת אדג'וורת (M).² ניתן לראות כי בהקצאה C' תועלות שני הצרכנים נמוכות מאלו שב-M. לפיכך התועלות של שני הצרכנים ב-C' נמוכות גם מאלו שב-C. מכאן שההקצאה C הוגנת.

הערה: נתון השאלה לפיו $\alpha < 2$ אינו משפיע על תקופות הטענה שבשאלה. יתר על כן, הטענה נכונה לכל כלכלת חליפין בה פועלים שני צרכנים שהעדפותיהם קמורות לראשית.

תשובה סופית: ההקצאות מתוארות על-ידי קטע קו החוצה GF בשרטוט של הסעיף הקודם. שלושת התנאים המגדירים את קטע זה הם:

- יעילות פארטו - $x_2 = 0$
- תועלת צרכן 1 גדולה או שווה לתועלתו ב-M: $10\alpha + y_1 \geq 5\alpha + 10 \iff y_1 \geq 10 - 5\alpha$
- תועלת צרכן 2 גדולה או שווה לתועלתו ב-M: $y_2 \geq 5\beta + 10$

² כלומר, הנקודה M מתקבלת בדיוק באמצע הקטע המחבר את C ו-C'.

שאלה 3

א. **תשובה: הטענה נכונה.** ההקצאה התחילית (או כל הקצאה נתונה אחרת) מעוררת את קנאתם של שני הצרכנים זה בזה, כאשר התועלת של כל צרכן מהסל של הצרכן האחר גדולה מתועלתו מהסל שלו עצמו. במצב כזה החלפת הסלים בין הצרכנים (כך שצרכן 1 יקבל את הסל התחילי של צרכן 2 וצרכן 2 יקבל את הסל התחילי של צרכן 1) תביא לשיפור פארטו. על-פי הגדרת מושג היעילות, אם ניתן לשפר פארטו ביחס להקצאה נתונה, אז זו אינה יעילה פארטו – ולפיכך ההקצאה התחילית אינה יעילה פארטו.

ב. **תשובה: הטענה נכונה.**

ג. **תשובה: כל עסקת חליפין בין צרכן 1 לצרכן 2 במסגרת צרכן 1 יקבל יחידת X אחת בתמורה ל-P יחידות Y, כאשר $4 < P < 8$ מביאה לשיפור פארטו.**³

שאלה 4

תשובה: לא. במעבר מהקצאה A להקצאה B, צרכן 1 מקבל תוספת חיובית משני המצרכים ואילו צרכן 2 מוותר על כמויות חיוביות משני המצרכים (מעבר כזה מבטא העברה חד-צדדית מצרכן 2 לצרכן 1). בהנחה שהעדפות הצרכנים (במקרה זה – צרכן 2 הוא הרלוונטי) הן מונוטוניות, כלומר ככל שצרכן צורך יותר מצבו טוב יותר (וככל שהוא צורך פחות, מצבו רע יותר), הרי שבמעבר מהקצאה A להקצאה B חלה הטבה במצבו של צרכן 1 והרעה במצבו של צרכן 2.

³ אנו עושים שימוש במינוח "יחידה אחת" רק לשם פשטות התשובה. ייתכן כמובן שעסקה שבמסגרתה צרכן 1 יקבל יחידת X אחת בתמורה ל-P יחידות Y לא תביא לשיפור במצב שני הצרכנים (בגלל ששיעור התחלופה השולי משתנה מנקודה לנקודה) או שאינה אפשרית כלל מאחר שלאחד משני הצרכנים (או לשניהם) אין די משאבים למימושה. ואולם מובטח כי ניתן להקטין את גודל העסקה די הצורך תוך שמירה על יחס החליפין בין X ל-Y, כך שעסקה הדומה לזו שמתוארת בתשובה אכן תתאפשר בפועל ותביא להטבה במצב שני הצרכנים (לדוגמה: צרכן 1 יקבל 0.1 יחידות X בתמורה ל-P-0.1 יחידות Y).