

## פרק ז': פרדוקסים של בחירות

ממשפט האי-אפשרות של ארו (Arrow) משתמע שלא קיימת דרך להפוך את יחסי ההעדפה של הפרטים ליחס העדפה חברתית אי-דיקטטורי "סביר". המבטיח את הקיום של בחירה חברתית עקבית ומוגדרת היטב, בחירה הדומה במהותה לבחירה הרציונאלית של כל פרט בחברה. בעייתיות זו מגבילה את כלליות היישום של מושגים כמו "האינטרס הציבורי", "המטרה הלאומית", "הפרט המייצג" או "האדם הסביר" ובעצם מטילה ספק ביחס למובן שניתן לייחס להם. מאחר שלא קיים יחס העדפה חברתית אי-דיקטטורי סביר המבטיח את קיומו של כלל בחירה חברתית מוגדר היטב, ניתן לצפות לכך שהשימוש בכללי בחירה שונים יהיה כרוך ב"פרדוקסים", דהיינו בהפרה של תכונות רצויות שונות. הפרק הנוכחי מוקדש להדגמה של פרדוקסים שכאלה. כבר עמדנו על כך שפרטים שונים מעדיפים בדרך כלל כללי בחירות שונים. לפיכך, מערכת פוליטית דמוקרטית עומדת בפני קושי בסיסי של השגת הסכמה על כלל הבחירות (Voting Rule) המשמש אותה. הדוגמאות המוצגות להלן מצביעות על קושי נוסף; כללי בחירות המועמדים לאימוץ על ידי המערכת הפוליטית-כלכלית עלולים להיות לקויים במובן זה שבנסיבות מסוימות הם מובילים לתוצאות פרדוקסאליות.

הפרדוקסים בהם נדון יודגמו להלן בהנחה שכלל האגרציה הוא כלל הרוב הפשוט, או שכלל הבחירה החברתית הוא כלל הרובניות, כלל הרובניות הדו-שלבי: רוב עם סיבוב שני (רעס"ש), שיטת הכרעת הרוב הסדרתית או כלל בורדה. בעזרת כללים אלה נדגים את ההפרה של התכונות האלה: טרנסטיביות, עקביות קונדורסה, פארטו, עקביות, עקביות בצמצום, עקביות בהרחבה, אי-תלות באפשרויות הזמינות, אי תלות בסדר יום ומונוטוניות. מההפרה של תכונת הטרנסטיביות על ידי כלל הרוב הפשוט משתמע שלא קיימת פונקציה בחירה המונעת על ידי יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט. מההפרה של עקביות בצמצום ועקביות בהרחבה משתמע שכלל הבחירה החברתית לא ניתן לרציונליזציה. משמעות ההפרה של התכונות הנותרות היא שהתפקוד של כלל הבחירה החברתית הוא לקוי, מוזר או בלתי סביר, מאחר שהוא איננו עונה על צפיות דמוקרטיות בסיסיות ביחס לקשר בין ההכרעות של הבוחרים וההכרעה הקולקטיבית.

### 1.1 אי-טרנסטיביות של יחס הרוב הפשוט – פרדוקס הבחירות של קונדורסה

הטבלה שלפניך חוזרת ומציגה פרופיל העדפות של שלושה פרטים, פרט 1, פרט 2 ופרט 3 בו מתקבל פרדוקס הבחירות או פרדוקס הבחירות של קונדורסה (Condorcet) שהכרנו בפרק ד', דוגמה 3.1.

#### דוגמה 1.1:

| P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> |
|----------------|----------------|----------------|
| x              | y              | z              |
| y              | z              | x              |
| z              | x              | y              |

במקרה זה  $xR^{maj}y, yR^{maj}z, zR^{maj}x$ . כלומר, יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט  $R^{maj}$  איננו טרנסיטיבי. על פי משפט 1.ג, לא קיימת אפוא פונקציה בחירה המונעת על ידי יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט.

למעגליות של יחס ההעדפה החברתית  $R^{maj}$  יש שתי השלכות מביכות: אפשר לנצל את המעגליות לצורך מניפולציות של סדר היום (agenda) ואפשר לנצל אותה לצורך שאיבת משאבים מהבוחרים. נבהיר את שני החסרונות בעזרת פרופיל ההעדפות שלמעלה, בהנחה שפונקציה הבחירה החברתית היא שיטת הכרעת הרוב הסדרתית. על פי שיטה זו תחילה נקבעת סדרת העימותים האפשריים בין האפשרויות ואחר כך מוכרע כל עימות על פי רוב פשוט. סדרת העימותים האפשריים נקראת בדרך כלל בשם "סדר יום" ולעיתים קרובות היא נקבעת על ידי יושב ראש (היושב ראש יכול להיות אחד מהבוחרים)<sup>1</sup>. בדוגמה שלפנינו קיימים שלושה סדרי יום אפשריים. מאחר וקיימות שלוש אפשרויות בלבד, סדרי היום האפשריים נבדלים זה מזה בזוג האפשרויות שנבחר לעימות הראשון. על פי סדר היום הראשון, תחילה נערך עימות בין האפשרויות  $x$  ו- $y$  ואחר כך נערך עימות בין המנצחת ובין אפשרות  $z$ . על פי סדר היום השני, תחילה נערך עימות בין האפשרויות  $x$  ו- $z$  ואחר כך נערך עימות בין המנצחת ובין אפשרות  $y$ . על פי סדר היום השלישי, תחילה נערך עימות בין האפשרויות  $y$  ו- $z$  ואחר כך נערך עימות בין המנצחת ובין אפשרות  $x$ . קל לוודא שהאפשרות הנבחרת בשיטת הרוב הסדרתית בהינתן סדר היום הראשון היא אפשרות  $z$ ; בעימות בין האפשרויות  $x$  ו- $y$  מנצחת אפשרות  $x$ , ובעימות בינה ובין האפשרות  $z$  מנצחת  $z$ , ולפיכך היא האפשרות הנבחרת. באופן דומה, קל לוודא שהאפשרות הנבחרת בשיטת הרוב הסדרתית בהינתן סדר היום השני היא אפשרות  $y$  והאפשרות הנבחרת בשיטת הרוב הסדרתית בהינתן סדר היום השלישי היא אפשרות  $x$ . שיטת הרוב הסדרתית חשופה אפוא למניפולציות של סדר יום כאשר יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט איננו טרנסיטיבי.

כדי להבהיר מדוע קיים פוטנציאל של שאיבת משאבים מהבוחרים שפירושו קיום פוטנציאל של חוסר יעילות, נניח שנקבע סדר היום הראשון, המוביל לבחירה של אפשרות  $z$ . במקרה זה לפרט 2 ולפרט 3 יש תמריץ להשקיע משאבים (כסף) בשינוי סדר היום. בפרט, שני הפרטים מעדיפים את סדר היום השני שמשמעותו בחירת אפשרות  $y$ , שמבחינתם היא אפשרות מועדפת מ- $x$ . תמורת מימוש התמריץ ושינוי סדר היום מסדר היום הראשון לסדר היום השני הפרטים מוכנים להשקיע משאבים ולהעבירם למי שקובע את סדר היום. אך בהינתן סדר היום השני, שוב קיים תמריץ לשני פרטים להשקיע משאבים בשינוי סדר היום, ופירוש הדבר שקיים פוטנציאל לשאיבת משאבים נוספת מהפרטים. בגלל המעגליות של יחס ההעדפה החברתית תמיד קיימים תמריצים לשינוי האפשרות הנבחרת על ידי השקעה בשינוי סדר היום ופירוש הדבר הוא שקיימת סכנה של חוסר יעילות – שאיבת משאבים מצבור הבוחרים תמורת מימוש התמריצים שלהם לשינוי האפשרות הנבחרת.

נשאלת השאלה האם, בהינתן פרופיל ההעדפות מסוים, אי-קיום זוכה על פי קונדורסה שקול למעגליות של יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט. התשובה לשאלה זו היא שלילית. אמנם מעגליות בהינתן פרופיל ההעדפות גוררת

<sup>1</sup> במקרה של חוסר הכרעה (תיקו) בין שתי אפשרויות, סדר היום גם קובע איזו אפשרות מוכרזת כמנצחת הממשיכה בהתמודדות.

אי- קיום זוכה על פי קונדורסה, אך אי- קיום זוכה על פי קונדורסה בפרופיל העדפות נתון איננה גוררת מעגליות, כפי שמבהירה הדוגמה הבאה.

## דוגמה 2.2:

הטבלה שלפניך מתארת את פרופיל ההעדפות של קבוצת הפרטים  $N = \{1,2,3,4\}$ . יחסי העדפה הם יחסי סדר חזקים המוגדרים על האפשרויות  $x, y$  ו- $z$ .

| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|-------|-------|-------|-------|
| x     | y     | z     | z     |
| y     | x     | x     | y     |
| z     | z     | y     | x     |

בהינתן פרופיל העדפות זה, לא קיימת אפשרות זוכה על פי קונדורסה, אך יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט איננו מעגלי (וודא).

מקובל להעריך את חומרת פרדוקס הבחירות על ידי ההסתברות של קיומו, דהינו, על ידי ההסתברות שבפרופיל ההעדפות של הפרטים מתקבלת מעגליות של יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט. הטבלה שלפניך מציגה את הסתברות פרדוקס הבחירות בכמה מקרים בהם מספר האפשרויות הוא אי-זוגי, בהנחה שההסתברויות של הפרופילים האפשריים הן שוות. בהנחה זו ההסתברות של פרדוקס הבחירות שווה לשיעור הפרופילים בהם הפרדוקס קיים מכלל כל הפרופילים האפשריים.

מספר הפרטים

| מספר אפשרויות | 3    | 5    | 7    | 9    | 11   | ... | בגבול |
|---------------|------|------|------|------|------|-----|-------|
| 3             | .056 | .069 | .075 | .078 | .080 | ... | .088  |
| 4             | .111 | .139 | .150 | .156 | .160 | ... | .176  |
| 5             | .160 | .200 | .215 | .230 | .251 | ... | .251  |
| 6             | .202 | .255 | .258 | .284 | .294 | ... | .315  |
| 7             | .239 | .299 | .305 | .342 | .343 | ... | .369  |
| :             | :    | :    | :    | :    | :    | :   | :     |
| בגבול         | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | ... | 1     |

שים לב, בהינתן מספר האפשרויות, הסתברות פרדוקס הבחירות גדלה עם גידול מספר הפרטים. העמודה הימנית מציינת מהו הגבול של הסתברות הפרדוקס כאשר מספר הבוחרים שואף לאינסוף. בהינתן מספר הפרטים,

הסתברות פרדוקס הבחירות גדלה עם גידול מספר האפשרויות. אך קצב הגידול של הסתברות פרדוקס הבחירות במקרה השני יותר מהיר מקצב הגידול של הסתברות הפרדוקס במקרה הראשון (השווה את קצב הגידול של ההסתברויות בעמודות עם קצב הגידול שך ההסתברויות בשורות). כאשר מספר האפשרויות שואף לאינסוף, הגבול של הסתברות פרדוקס הבחירות שווה ל- 1.

## 2.2 אי-עקביות קונדורסה

הקיום של אפשרות זוכה על פי קונדורסה איננו מובטח ומכך משתמע, כפי שהבהרנו בסעיף הקודם, שלא קיימת פונקצית בחירה חברתית המונעת (ניתנת לרציונאליזציה) על ידי יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט  $R^{maj}$ . יחד עם זאת קיימות פונקציות בחירה חברתית שאינן ניתנות לרציונאליזציה על ידי יחס הרוב הפשוט, אך הן נאמנות לרעיון של קונדורסה באשר לבחירה החברתית הרצויה. נאמנות זו מתבטאת בכך, שאם בפרופיל העדפות מסוים קיימת אפשרות זוכה על פי קונדורסה, פונקציות הבחירה החברתית האלה בוחרות בה. כזכור מפרק ד', פונקצית בחירה המבטיחה את הבחירה של כל אפשרות שהיא זוכה על פי קונדורסה מקיימת את קריטריון קונדורסה ומקובל לומר שהיא "עקבית-קונדורסה" (Condorcet-Consistent). שיטת הכרעת הרוב הסדרתית היא פונקצית בחירה חברתית נחושה עקבית-קונדורסה. מצד אחד, על פי הגדרה, בהינתן סדר היום, שיטה זו מובילה להכרעה, כלומר לבחירה של אפשרות אחת. מצד שני, אם קיימת אפשרות זוכה על פי קונדורסה, אפשרות זו היא האפשרות הנבחרת (וודא). גם כלל קופלנד (Copeland) הוא פונקצית בחירה חברתית עקבית-קונדורסה.<sup>2</sup> לעומת זאת, כללים רבים אינם מקיימים את קריטריון קונדורסה, וביניהם כללים המבוססים על שימוש בהכרעת הרוב. הדוגמה שלפניך מבהירה שכלל הרובניות וכלל הרוב עם סיבוב שני אינם מקיימים את קריטריון קונדורסה.

## דוגמה 3.2:

בטבלה שלפניך מוצג פרופיל ההעדפות של 101 פרטים. יחסי ההעדפה הם יחסי סדר חזקים המוגדרים על שלש אפשרויות,  $x, y, z$ . קיימים שלשה טיפוסים פרטים. יחס ההעדפה של חמישים פרטים מתואר בעמודה הראשונה (משמאל) של הטבלה, יחס ההעדפה של חמישים פרטים מתואר בעמודה השנייה, יחס ההעדפה של פרט אחד מתואר בעמודה השלישית.

|    |    |   |
|----|----|---|
| 50 | 50 | 1 |
| x  | z  | y |
| y  | y  | z |
| z  | x  | x |

<sup>2</sup> כלל Copeland מוגדר כך: לכל אפשרות טיפוסית  $x$  נייחס ערך  $C(x)$ , הערך של קופלנד. ערך זה שווה להפרש בין מספר האפשרויות ש- $x$  עדיפה מהם על פי יחס הרוב פשוט למספר האפשרויות העדיפות מ- $x$ . כלל קופלנד בוחר באפשרות בעלת הערך המקסימאלי. ההוכחה שכלל זה הוא עקבי-קונדורסה כלולה בתשובה לשאלה ה-9 במדריך הלמידה.

במקרה זה אפשרות  $y$  זוכה על פי קונדורסה, אך האפשרויות הנבחרות על פי כלל הרובניות ועל פי כלל הרוב עם סיבוב שני<sup>3</sup> הן  $x$  ו- $z$ , כלומר, שני הכללים אינם מקיימים את קריטריון קונדורסה.

לא זו בלבד שכלל הרובניות מסוגל לבחור באפשרות שאיננה זוכה על פי קונדורסה, אלא שהאפשרות הנבחרת על ידו יכולה להיות "נחותה על פי קונדורסה" (אפשרות שהיא נחותה על פי יחס הרוב הפשוט בהשוואה לכל אפשרות אחרת). דוגמא לכך מופיעה בשאלה ה-7 במדריך הלמידה. נסיים סעיף זה בציון העובדה שלא רק כלל הרובניות, אלא כל כללי הנקודות שהכרנו בפרק ה', ובכללם כלל בורדה, אינם מקיימים את קריטריון קונדורסה. יתר על כן, יתכן שבפרופיל העדפות נתון, כל כלל נקודות אפשרי מפר את תכונת קונדורסה, ראה שאלה ה-8 במדריך הלמידה.

### 3.2 הפרת קריטריון פארטו

בדוגמה של פרדוקס הבחירות שהוצגה בסעיף 1.1, האפשרות הנבחרת בהינתן סדר יום כלשהו, מנוצחת על ידי אפשרות אחרת בעימות המוכרע על פי רוב פשוט. נראה עתה דוגמה שבה האפשרות הנבחרת בשיטת הרוב הסדרתית מנוצחת על ידי אפשרות אחרת בעימות המוכרע באחידות דעים. במילים אחרות, קיימת אפשרות המועדפת על ידי כל הפרטים מהאפשרות הנבחרת. במקרה כזה נאמר ששיטת הרוב הסדרתית מפרה את קריטריון פארטו.

### דוגמה 4.2:

פרופיל ההעדפות של שלשה פרטים המוגדר על ארבעת האפשרויות  $x, y, z$  ו- $w$  מתואר בטבלה שלפניך.

| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
|-------|-------|-------|
| $x$   | $y$   | $w$   |
| $y$   | $w$   | $z$   |
| $w$   | $z$   | $x$   |
| $z$   | $x$   | $y$   |

נניח שסדר היום קובע שתחילה מתמודדות האפשרויות  $y$  ו- $w$ , המנצחת מתמודדת עם אפשרות  $x$ , ובשלב השלישי והאחרון המנצחת בשלב השני מתמודדת מול אפשרות  $z$ . בשיטת הרוב הסדרתית האפשרות הנבחרת היא  $z$  (וודא).

<sup>3</sup> נניח שהפרטים בוחרים באפשרות הטובה ביותר מבחינתם. על פי "שיטת הרוב עם סיבוב שני" נערכים לכל היותר שני סיבובי הצבעה. אפשרות נבחרת בשלב הראשון אם היא זוכה ביותר ממחצית קולות הבוחרים. אם לא קיימת אפשרות כזו, נערך סיבוב שני ובו מתמודדות שתי אפשרויות שזכו במספר הקולות הגבוה ביותר בסיבוב הראשון. האפשרות המנצחת ברוב פשוט מביניהן היא הנבחרת. ראה שאלות 11.1 ו-12.2 במדריך הלמידה.

אך אפשרות זו מועדפת על ידי אפשרות  $w$  מבחינתו של כל פרט, כלומר שיטת הרוב הסדרתית מפרה את קריטריון פארטו.

#### 4. הפרת תכונת העקביות

תכונת העקביות שהוגדרה בפרק ה' עוסקת בקשר בין קבוצות הבחירה של שתי קבוצות זרות  $N_1$  ו-  $N_2$  ובין קבוצת הבחירה של הקבוצה  $N$  הכוללת את שתיהן,  $N = N_1 \cup N_2$ , כאשר הבחירה נעשית מתוך קבוצת אפשרויות  $S$ . התכונה מבטיחה שקבוצת הבחירה המתאימה לפרופיל ההעדפות של הקבוצה  $N$  מוכלת בחיתוך של שתי קבוצות הבחירה של  $N_1$  ו-  $N_2$ . פירוש הדבר הוא שההסכמה ביחס לאפשרות הנבחרת בעת שהבחירה מתבצעת על ידי כל קבוצה בנפרד ממשיכה להתקיים בעת ששתי הקבוצות מתאחדות. הדוגמה שלפניך מבהירה שכלל הרובניות הדו-שלבי מפר את תכונת העקביות.

#### דוגמה 5.1:

נניח שכל אחת משתי הקבוצות  $N_1$  ו-  $N_2$  כוללת 100 פרטים. יחסי ההעדפה החזקים של 200 הפרטים מוגדרים על שלש האפשרויות  $x, y$  ו-  $z$ . בטבלה שלפניך מוצג פרופיל ההעדפות של הקבוצה  $N_1$ .

$N_1$

|    |    |    |
|----|----|----|
| 35 | 40 | 25 |
| x  | y  | z  |
| z  | z  | y  |
| y  | x  | x  |

בטבלה הבאה מוצג פרופיל ההעדפות של הקבוצה  $N_2$ .

$N_2$

|    |    |   |
|----|----|---|
| 40 | 55 | 5 |
| z  | y  | x |
| y  | z  | z |
| x  | x  | y |

בקבוצה  $N_1$  נבחרת אפשרות  $y$  בסיבוב שני (וודא).

בקבוצה  $N_2$  נבחרת אפשרות  $y$  בסיבוב הראשון (וודא).

אך בקבוצה  $N$  נבחרת אפשרות  $z$  בסיבוב השני ! (בסיבוב הראשון לא קיימת אפשרות טובה ביותר מבחינת רוב (יותר ממחצית) הבוחרים. נערך אפוא סיבוב שני בו מתמודדות שתי האפשרויות  $y$  ו- $z$  שזכו במספר הקולות הגבוה ביותר בסיבוב הראשון. הזוכה בין שתי אפשרויות אלה בסיבוב השני היא  $z$ , מאחר והיא זוכה ב-105 קולות מול 95 קולות בהן זוכה אפשרות  $y$ ). מכאן שכלל הרובניות הדו-שלבי מפר את תכונת העקביות.

$N$

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 65  | 95  | 40  |
| $z$ | $y$ | $x$ |
| $y$ | $z$ | $z$ |
| $x$ | $x$ | $y$ |

דוגמאות נוספות של כללים המפרים את תכונת העקביות מופיעות בשאלות ה.5 ו-7.ז במדריך הלמידה.

## 5.ז אי-עקביות בצמצום ובהרחבה

עקביות בצמצום פירושה שאם אפשרות מסוימת  $x$  נבחרת מקבוצת האפשרויות  $T$  וקבוצה זו מצטמצמת על-ידי הרחקת אפשרויות השונות מ- $x$ , אזי אפשרות  $x$  בהכרח נבחרת מקבוצת האפשרויות המצומצמת. לתכונת העקביות בצמצום, עקביות  $\alpha$ , יש חשיבות רבה מאחר שהיא אחת משתי התכונות ההכרחיות והמספיקות לרציונליזציה של פונקצית הבחירה החברתית. בפרק ג' ראינו שכלל הרובניות לא מקיים את תכונת העקביות בצמצום (ראה דוגמה ג.2). להלן נראה שגם כלל בורדה מפר את תכונה  $\alpha$ .

## דוגמה 6.ז:

פרופיל ההעדפות של חמישה עשר פרטים המוגדר על ארבעת האפשרויות  $x, y, z$  ו- $w$  מתואר בטבלה שלפניך.

| פרט אחד | פרט אחד | 2 פרטים | 2 פרטים | 3 פרטים | 3 פרטים | 3 פרטים |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $z$     | $z$     | $w$     | $z$     | $z$     | $y$     | $x$     |
| $y$     | $w$     | $x$     | $y$     | $w$     | $x$     | $y$     |
| $x$     | $y$     | $y$     | $w$     | $x$     | $z$     | $z$     |
| $w$     | $x$     | $z$     | $x$     | $y$     | $w$     | $w$     |

במקרה זה סך הנקודות המוענק לארבע האפשרויות על פי כלל בורדה הוא (ראה שאלה ד.2 במדריך הלמידה):

$$\sum_N s_i(x) = 23, \sum_N s_i(y) = 24, \sum_N s_i(z) = 27, \sum_N s_i(w) = 16$$

מכאן שעל פי כלל בורדה נבחרת אפשרות z.

נניח עתה שקבוצת האפשרויות מצטמצמת לקבוצה הכוללת את שלש האפשרויות x, y ו-z.

במקרה זה סך הנקודות המוענק לשלש האפשרויות על פי כלל בורדה הוא :

$$\sum_N s_i(x) = 16, \sum_N s_i(y) = 15, \sum_N s_i(z) = 14$$

מכאן שלאחר צמצום קבוצת האפשרויות, על פי כלל בורדה נבחרת אפשרות x, אף על פי שאפשרות z

שנבחרה לפני הצמצום שייכת לקבוצה האפשרויות המצומצמת. כלל בורדה מפר אפוא את תכונה  $\alpha$ .

עקביות בהרחבה פירושה שאם אפשרות x נבחרת מתוך קבוצת אפשרויות S וגם מתוך קבוצת אפשרויות T

המכילה את S, אזי כל אפשרות אחרת שנבחרת מ-S גם כן נבחרת מ-T. בשאלה ג.7 במדריך הלמידה ראינו כי

כלל הרובניות איננו עקבי בהרחבה, דהיינו הוא איננו מקיים את התכונה עקביות  $\beta$ .

## 6.2 פרדוקס היפוך הסדר (The Inverted Order Paradox)

בהינתן כלל האגרציה, אלימינציה של אחת האפשרויות יכולה לשנות את דרוג האפשרויות הנותרות. יתר על כן,

דרוג אותן אפשרויות יכול להתהפך בהשוואה לדירוגן המקורי. מקרה שכזה מכונה "פרדוקס היפוך הסדר".

הדוגמה הבאה מבהירה שכלל האגרציה של בורדה  $f^B$  (ראה פרק 4) חשוף לפרדוקס היפוך הסדר.

### דוגמה 7.2:

פרופיל ההעדפות של שבעה פרטים המוגדר על ארבעת האפשרויות x, y, z ו-w מתואר בטבלה שלפניך.

| פרט 1 | פרט 2 | פרט 3 | פרט 4 | פרט 5 | פרט 6 | פרט 7 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x     | w     | y     | x     | w     | y     | x     |
| z     | x     | w     | z     | x     | w     | z     |
| y     | z     | x     | y     | z     | x     | y     |
| w     | y     | z     | w     | y     | z     | w     |

במקרה זה סך הנקודות המוענק לארבע האפשרויות על פי כלל האגרציה של בורדה הוא (ראה שאלה ד.2 במדריך

הלמידה):

$$\sum_N s_i(z) = 8, \sum_N s_i(w) = 10, \sum_N s_i(y) = 9, \sum_N s_i(x) = 15$$

ומכאן ש-  $x R^B w R^B y R^B z$

נניח עתה שאפשרות x מורחקת, דהיינו קבוצת האפשרויות מצטמצמת לקבוצה הכוללת את שלש האפשרויות

$y, z$  ו- $w$ . במקרה זה סך הנקודות המוענק לשלש האפשרויות הנותרות על פי כלל בורדה הוא :

$$\sum_N s_i(w) = 6, \sum_N s_i(y) = 7, \sum_N s_i(z) = 8$$

מכאן שלאחר צמצום קבוצת האפשרויות, על פי כלל האגרציה של בורדה,

$$z R^B y R^B w$$

כלומר, דירוג האפשרויות  $y, z$  ו- $w$  אכן התהפך לאחר האלימינציה של אפשרות  $x$  בהשוואה לדירוגן הראשוני.

## 7.2 פרדוקס הזוכה ההופך למפסיד (The Winner Turns Loser Paradox)

בהינתן כלל האגרציה, אלימינציה של אחת האפשרויות יכולה לשנות את דרוג האפשרויות הנותרות. יתר על כן, לא רק שדרוג אותן האפשרויות יכול להתהפך בהשוואה לדירוגן הראשוני, כפי שהדגמנו בסעיף הקודם, אלא שהאפשרות הנבחרת במצב הראשוני יכולה להיות הנחותה ביותר במצב החדש. מקרה שכזה מכונה "פרדוקס הזוכה ההופך למפסיד". הדוגמה הבאה מבהירה שכלל האגרציה של בורדה  $f^B$  חשוף לפרדוקס שכזה.

### דוגמה 8.2:

פרופיל ההעדפות של שבעה פרטים המוגדר על ארבעת האפשרויות  $x, y, z$  ו- $w$  מתואר בטבלה שלפניך.

| פרט 1 | פרט 2 | פרט 3 | פרט 4 | פרט 5 | פרט 6 | פרט 7 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x     | y     | z     | x     | y     | z     | x     |
| y     | z     | w     | y     | z     | w     | y     |
| z     | w     | x     | z     | w     | x     | z     |
| w     | x     | y     | w     | x     | y     | w     |

במקרה זה סך הנקודות המוענק לארבע האפשרויות על פי כלל האגרציה של בורדה הוא:

$$\sum_N s_i(z) = 13, \sum_N s_i(w) = 6, \sum_N s_i(y) = 12, \sum_N s_i(x) = 11$$

$$z R^B y R^B x R^B w \quad \text{ומכאן ש-}$$

נניח עתה שאפשרות  $w$  מורחקת, דהיינו קבוצת האפשרויות מצטמצמת לקבוצה הכוללת את שלש האפשרויות

$x, y, z$ . במקרה זה סך הנקודות המוענק לשלש האפשרויות הנותרות על פי כלל בורדה הוא :

$$\sum_N s_i(x) = 8, \sum_N s_i(y) = 7, \sum_N s_i(z) = 6$$

מכאן שלאחר צמצום קבוצת האפשרויות, על פי כלל האגרציה של בורדה,

$$x R^B y R^B z$$

כלומר, דירוג האפשרויות  $x$ ,  $y$  ו- $z$ , אכן התהפך לאחר האלימינציה של אפשרות  $w$  בהשוואה לדירוגן הראשוני והאפשרות  $z$  הזוכה במצב הראשוני הפכה לנחותה ביותר (למפסידה) במצב החדש. שים לב, אם כלל האגרציה של בורדה חשוף לפרדוקס הזוכה ההופך למפסיד בפרופיל העדפות מסוים, אז באותו פרופיל העדפות כלל בורדה מפר את תכונת העקביות בצמצום.

## 8.2 פרדוקס ההעדרות (The No-Show Paradox)

פונקצית בחירה חברתית חשופה לפרדוקס ההעדרות אם קיים פרופיל העדפות שבו יש תמריץ לחלק מן הפרטים לא להשתתף בבחירה החברתית. קיום התמריץ פירושו שהאפשרות הנבחרת כאשר הפרטים אינם משתתפים בבחירה החברתית עדיפה מבחינתם בהשוואה לאפשרות הנבחרת כאשר הם משתתפים בבחירה החברתית. הדוגמה הבאה מבהירה ששיטת הרובניות הדו-שלבית חשופה לפרדוקס ההעדרות.

### דוגמה 9.2:

פרופיל העדפות של 100 פרטים הבוחרים בין שלשה מועמדים  $x$ ,  $y$  ו- $z$  מתואר בטבלה שלפניך.

| 25 בוחרים | 2 בוחרים | 47 בוחרים | 26 בוחרים |
|-----------|----------|-----------|-----------|
| $z$       | $y$      | $y$       | $x$       |
| $x$       | $z$      | $z$       | $y$       |
| $y$       | $x$      | $x$       | $z$       |

על פי שיטת הרובניות הדו-שלבית נבחר מועמד  $x$ , הזוכה ברוב של 51% בסיבוב השני (וודא). נניח ש-47 הבוחרים שהעדפותיהם מתוארות בעמודה השנייה של הטבלה אינם משתתפים בבחירות. במקרה זה המועמד הנבחר בסיבוב השני הוא  $z$  (וודא). פירוש הדבר הוא של-47 הבוחרים יש תמריץ להעדר מהבחירות מאחר שהמועמד הנבחר ללא השתתפותם, המועמד  $z$ , עדיף מבחינתם מהמועמד  $x$ , המועמד הנבחר כאשר הם משתתפים בבחירות.

- יחס ההעדפה החברתית של רוב פשוט  $R^{maj}$  אינו טרנסיטיבי. לפיכך, לא קיימת פונקציה בחירה המונעת על ידי  $R^{maj}$ .
- למעגליות של יחס ההעדפה החברתית  $R^{maj}$  יש שתי השלכות מביכות: אפשר לנצל את המעגליות לצורך מניפולציות של סדר היום (agenda) ואפשר לנצל אותה לצורך שאיבת משאבים מהבוחרים.
- פונקציה בחירה המבטיחה את הבחירה של כל אפשרות שהיא זוכה על פי קונדורסה מקיימת את קריטריון קונדורסה ומקובל לומר שהיא "עקבית-קונדורסה" (Condorcet-Consistent).
- כל כלל נקודות אפשרי, ובפרט כלל הרובניות וכלל בורדה מפר את תכונת קונדורסה. כלל הרובניות עם סיבוב שני אינו מקים את קריטריון קונדורסה.
- פונקציית בחירה חברתית מפרה את קריטריון פארטו אם קיימת אפשרות המועדפת על ידי כל הפרטים מהאפשרות הנבחרת. שיטת הרוב הסדרתית מפרה את קריטריון פארטו.
- תכונת העקביות מבטיחה שההסכמה ביחס לאפשרות נבחרת בעת שהבחירה מתבצעת על ידי כל שתי קבוצות נפרדות ממשיכה להתקיים בעת ששתי הקבוצות מתאחדות. כלל הרובניות הדו-שלבי מפר את תכונת העקביות.
- עקביות בצמצום פירושה שאם אפשרות מסוימת  $x$  נבחרת מקבוצת האפשרויות  $T$  וקבוצה זו מצטמצמת על-ידי הרחקת אפשרויות השונות מ- $x$ , אזי אפשרות  $x$  בהכרח נבחרת מקבוצת האפשרויות המצומצמת. כלל הרובניות וכלל בורדה מפרים את תכונת העקביות בצמצום.
- עקביות בהרחבה פירושה שאם אפשרות  $x$  נבחרת מתוך קבוצת אפשרויות  $S$  וגם מתוך קבוצת אפשרויות  $T$  המכילה את  $S$ , אזי כל אפשרות אחרת שנבחרת מ- $S$  גם כן נבחרת מ- $T$ . כלל הרובניות אינו עקבי בהרחבה.
- אלימינציה של אחת האפשרויות יכולה להפוך את דרוג האפשרויות הנותרות בהשוואה לדירוגן המקורי. מקרה שכזה מכונה "פרדוקס היפוך הסדר". כלל האגרציה של בורדה חשוף לפרדוקס היפוך הסדר.
- אלימינציה של אפשרות שאיננה אפשרות נבחרת יכולה להפוך את דרוג האפשרויות הנותרות בהשוואה לדירוגן המקורי. מקרה שכזה אפשרות הנבחרת במצב הראשוני יכולה להיות הנחותה ביותר במצב החדש. מקרה שכזה מכונה "פרדוקס הזוכה ההופך למפסיד". כלל האגרציה של בורדה חשוף לפרדוקס הזוכה ההופך למפסיד.
- פונקציה בחירה חברתית חשופה לפרדוקס ההעדרות אם קיים פרופיל העדפות שבו יש תמריץ לחלק מן הפרטים לא להשתתף בבחירה החברתית. קיום התמריץ פירושו שהאפשרות הנבחרת כאשר הפרטים אינם משתתפים בבחירה החברתית עדיפה מבחינתם בהשוואה לאפשרות הנבחרת כאשר הם משתתפים בבחירה החברתית. שיטת הרובניות הדו-שלבית חשופה לפרדוקס ההעדרות.