

תרגיל 7 תשע"ה: בחירה חברתית על-ידי בחירות

שאלה 1

א. תשובה:

מנצח קונדורסה הוא אפשרות שזוכה ברוב פשוט מול כל אפשרות אחרת. נבדוק תחילה מי זוכה מבין שתי האפשרויות A ו-B:

- טיפוס 1 מעדיף את A על B (4 פרטים)
- טיפוס 2 מעדיף את B על A (3 פרטים)
- טיפוס 3 מעדיף את B על A (3 פרטים)
- סה"כ: רוב של 6 מול 4 ל-B.

מסקנת הביניים היא ש-A לא יכול להיות מנצח קונדורסה כי הוא מפסיד ל-B. נמשיך ונבדוק את B מול C:

- טיפוס 1 מעדיף את B על C (4 פרטים)
- טיפוס 2 מעדיף את B על C (3 פרטים)
- טיפוס 3 מעדיף את C על B (3 פרטים)
- סה"כ: רוב של 7 מול 3 ל-B.

מסקנה סופית: מאחר ש-B מנצח ברוב פשוט הן את A והן את C, הוא מנצח קונדורסה.

ב. **תשובה:** על-פי שיטת בורדה, כל מועמד מקבל מספר נקודות השווה למספר המועמדים המדורגים מתחתיו. לפיכך נשלב בטבלה הבאה את מספר הנקודות (בסוגריים) של כל מועמד בהתאם לטיפוס המדרג:

n_3	n_2	n_1
C(2)	B(2)	A(2)
B(1)	C(1)	B(1)
A(0)	A(0)	C(0)

סה"כ הנקודות שמקבל A: $n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 0 + n_3 \cdot 0 = 8$

סה"כ הנקודות שמקבל B: $n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 1 = 13$

סה"כ הנקודות שמקבל C: $n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot 2 = 9$

מכאן שהמנצח גם על-פי שיטת בורדה הוא מועמד B.

ג. **תשובה:** על-פי שיטת הרובניות, המועמד שמדורג גבוה ביותר מקבל נקודה אחת ושאר המועמדים מקבלים אפס. נשלב בטבלה הבאה את מספר הנקודות (בסוגריים) של כל מועמד בהתאם לטיפוס המדרג:

n_3	n_2	n_1
C(1)	B(1)	A(1)
B(0)	C(0)	B(0)
A(0)	A(0)	C(0)

סה"כ הנקודות שמקבל A: $n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 0 + n_3 \cdot 0 = 4$

סה"כ הנקודות שמקבל B: $n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot 0 = 3$

סה"כ הנקודות שמקבל C: $n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 0 + n_3 \cdot 1 = 3$

מכאן שהמנצח על-פי שיטת הרובניות הוא מועמד A.

ד. **תשובה:** על-פי שיטת הבחירה המאשרת, כל מדרג מאשר מספר נתון של מועמדים (במקרה זה שניים). המועמד שזוכה למספר המאשרים הגדול ביותר הוא הזוכה.

מועמד A: מאושר על-ידי: טיפוס 1 בלבד.

מועמד B: מאושר על-ידי כל הטיפוסים

מועמד C: מאושר על ידי טיפוסים 2 ו-3.

מכאן שעל-פי שיטת הבחירה המאשרת ייבחר מועמד B.

שאלה 2

תשובה: ניעזר בנתוני שאלה 1 בשינויים הבאים: מספר הדיירים מטיפוס 1 שווה ל-6 ומספר הדיירים מטיפוס 2 שווה ל-4, מספר הדיירים מטיפוס 3 שווה לאפס ($n_3=0, n_2=4, n_1=6$). נחשב את מספר הנקודות שמקבל כל מועמד:

$$\text{סה"כ הנקודות שמקבל A: } n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 0 + n_3 \cdot 0 = 12$$

$$\text{סה"כ הנקודות שמקבל B: } n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 1 = 14$$

$$\text{סה"כ הנקודות שמקבל C: } n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot 2 = 4$$

מכאן כי על-פי שיטת הנקודות של בורדה, מנצח מועמד B. קל לראות שמועמד B אינו מנצח קונדורסה כי הוא מפסיד ברוב פשוט למועמד A. בנוסף, מועמד A מנצח ברוב פשוט גם את מועמד C ולכן A הוא מנצח קונדורסה.

לסיכום: במסגרת הדוגמה קיבלנו ששיטת הנקודות של בורדה מובילה לבחירה במועמד B, למרות שמועמד A הוא מנצח קונדורסה.

שאלה 3

תשובה: הטענה אינה נכונה. ניעזר בנתוני שאלה 1 בשינויים הבאים כדי להביא דוגמה נגדית: מספר הדיירים מטיפוס 1 שווה ל-7 ומספר הדיירים מטיפוס 2 שווה ל-0, מספר הדיירים מטיפוס 3 שווה ל-3 ($n_3=3, n_2=0, n_1=7$).

נבדוק עבור כל מועמד על-ידי מי הוא מאושר, בהנחה שמאושרים שני המועמדים המדורגים גבוה ביותר:

מועמד A: מאושר על-ידי טיפוס 1 בלבד.

מועמד B: מאושר על-ידי כל הטיפוסים

מועמד C: מאושר על ידי טיפוסים 2 ו-3.

מכאן שעל-פי שיטת הבחירה המאשרת ייבחר מועמד B.

לעומת זאת, קל לראות כי מנצח קונדורסה הוא מועמד A (מאחר שמספר המדרגים אותו גבוה ביותר מהווה את רוב הפרטים).

לסיכום: במסגרת הדוגמה קיבלנו ששיטת הבחירה המאשרת מובילה לבחירה במועמד B, למרות שמועמד A הוא מנצח קונדורסה.

שאלה 4

תשובה: דוגמה לכך היא שאלה 1 שבמסגרתה מנצח קונדורסה הוא מועמד B ואילו שיטת הרובניות מובילה לבחירה במועמד A. נדגיש כי שיטת הרובניות מובילה במקרה זה לבחירה במועמד A שהוא מפסיד קונדורסה מאחר שהוא מנצח ברוב פשוט גם על ידי B וגם על ידי C.

שאלה 5

תשובה: נוכיח עבור המקרה בו קיימים שלושה מועמדים לבחירה: A, B ו-C. במקרה כזה, קיימים בסה"כ 6 טיפוסים אפשריים של מדרגים:¹

n_6	n_5	n_4	n_3	n_2	n_1
C(2)	C(2)	B(2)	B(2)	A(2)	A(2)
B(1)	A(1)	C(1)	A(1)	C(1)	B(1)
A(0)	B(0)	A(0)	C(0)	B(0)	C(0)

כאשר n_i מציינ את מספר המדרגים מטיפוס i.

נניח כי C הוא מפסיד קונדורסה, כלומר הוא מפסיד ברוב פשוט מול כל אפשרות אחרת (ובמקרה זה הוא מפסיד לאפשרויות A ו-B).

מאחר ש-C מפסיד ברוב פשוט ל-A, נקבל כי מספר המדרגים את A גבוה מ-C גדול ממספר המדרגים את C גבוה מ-A, כלומר: $n_1 + n_2 + n_3 > n_4 + n_5 + n_6$. מאחר ש-C מפסיד ברוב פשוט ל-B, נקבל כי:

¹ באופן כללי, אם קיימים m מועמדים, קיימים m! דירוגים אפשריים.

$$n_1+n_3+n_4 > n_2+n_5+n_6$$

על-ידי חיבור שני האי-שוויונות נקבל:

$$2n_1 + n_2 + 2n_3 + n_4 > n_2 + n_4 + 2n_5 + 2n_6 \quad (*)$$

ומכאן:

$$n_1 + n_3 > n_5 + n_6 \quad (**)$$

כעת נשים לב כי הביטוי המופיע במצד שמאל של אי-שוויון (*) שווה למעשה למספר נקודות בורדה שמקבלת אפשרות C. כמו כן, נשים לב כי מספר נקודות בורדה הכולל (של כל המועמדים יחד) שווה ²ל:

$$3n_1 + 3n_2 + 3n_3 + 3n_4 + 3n_5 + 3n_6 = 3n$$

נבחן את החלק היחסי של הניקוד שמקבל מועמד C מתוך סך הנקודות:

$$\frac{n_2 + n_4 + 2n_5 + 2n_6}{3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6)} < \frac{n_2 + n_4 + n_5 + n_6 + (n_1 + n_3)}{3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6)} = \frac{1}{3}$$

$$n_1 + n_3 > n_5 + n_6 \quad (**)$$

מאחר שעל-פי אי-שוויון (*)

כלומר, מועמד C מקבל פחות משליש מסך הנקודות של בורדה. מכאן משתמע שלפחות אחד מהמועמדים האחרים מקבל יותר משליש מהנקודות, ולכן לא ייתכן כי מועמד C הוא המנצח לפי שיטת הנקודות של בורדה.

² באופן כללי, אם קיימים n מדרגים ו-m מועמדים סה"כ נקודות בורדה שווה ל: $n \cdot (1+2+\dots+m-1) = 0.5n \cdot m \cdot (m-1)$.