

אוניברסיטת בר אילן

המחלקה לכלכלה

חוברת תרגילים

בקורס

מבוא לסטטיסטיקה

ערכה:

שרה רוזנווסר

תשע"ה 2014-2015

המחלקה לכלכלה - מבוא לסטטיסטיקה א'

תוכנית הקורס

1. הסטטיסטיקה, מטרות ושימושים. נתונים סטטיסטיים. משתנה כמותי ומשתנה איכותי.
2. מיון נתונים: טבלת שכיחויות, שכיחות יחסית, שכיחות מצטברת.
3. המחשבות גרפיות: דיאגרמת מקלות, הסטוגרמה, מצולע שכיחויות, גרף שכיחות מצטברת.
4. ערכים מרכזיים: שכיח, חציון, ממוצע אריתמטי.
5. מדדי פיזור: תחום, תחום בין רבעוני, סטייה ממוצעת, שונות, סטיית תקן, סטייה יחסית.
6. מדדי אסימטריה: מדד המבוסס על הרבעונים, מדד פירסון.
7. קומבינטוריקה: מושגים בסיסיים, השימושים בתורת ההסתברות.
8. מושגי יסוד בהסתברות: ניסוי סטטיסטי, מרחב מדגם: מאורעות, יחסים ופעולות ביניהם: הכלה, שיוויון, איחוד, חיתוך, משלים, דיאגרמת וין, משפטי דה-מורגן.
9. הסתברות: הגדרה, תכונות, הסתברות מותנית, נוסחת ההסתברות השלמה, נוסחת בייס, מאורעות בלתי תלויים.
10. משתנה מקרי: הגדרה, פונקציית ההסתברות, פונקציית ההתפלגות, פעולות חשבון בין משתנים מקריים, התוחלת, השונות ותכונותיהן, סטיית תקן.
11. התפלגות משותפת של משתנים מקריים, תוחלת מותנית, שונות משותפת, תלות ואי תלות, מתאם, מקדם המתאם.
12. משתנים מקריים ספציפיים: בינומי, פואסוני, גאומטרי, הפרגאומטרי

ספרים מומלצים:

1. סטטיסטיקה, שפיגל, הוצאת שאום, סטימצקי
2. מבוא לסטטיסטיקה, רות בייט-מרום
3. מבוא לתורת ההסתברות, אורי ליברמן
4. סטטיסטיקה תיאורית (ספר חומר תאורטי וספר תרגילים), דרורה קרוטקין
5. הסתברות והתפלגויות (חומר תאורטי ותרגילים), דרורה קרוטקין
6. יסודות בסטטיסטיקה והסתברות, מרים ברקת
7. Yamane: "Statistics", Harper & Row
8. Walpole: "Elementary Statistical Concepts", Macmillan

9. Walpole: "Introduction to Statistic", Macmillan

10. Wonnacot & Wonnacot: "Introductory Statistics" J. Wiley & Sons

תוכן העניינים

4	סימן ה Σ
6	סטטיסטיקה תיאורית.....
14	חשבון מאורעות.....
17	קומבינטוריקה.....
19	הסתברות.....
22	הסתברות מותנית, תלות ואי תלות.....
25	נוסחת ההסתברות השלמה ומשפט בייס.....
28	משתנה מקרי בדיד.....
31	התפלגות משותפת.....
36	התפלגות בדידות.....

סימן ה- Σ

תרגיל מס' 1

1. פשט את הביטויים הבאים (כתוב הביטויים ללא סימן ה- Σ):

א. $\sum_{i=1}^n (3x_i + y_i)$

ב. $\sum_{k=0}^4 (2^k + 3)$

ג. $\sum_{j=5}^7 (bx_j + cy_j)(bx_j - cy_j)$

2. רשום את הביטויים הבאים בעזרת הסימן Σ :

א. $x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4$

ב. $3x_1y_2 + 4x_2y_3 + 5x_3y_4$

ג. $x_1y_2^3x_3^4 + x_2y_3^4x_4^5 + x_3y_4^5x_5^6$

3. נתון:

i	x	y
1	0	0
2	-1	1
3	-2	-3
4	1	-2

וידוע $a=2$, $b=5$.

חשב:

א. $\sum_{i=1}^3 ax_i$

ב. $\sum_{i=1}^3 (ax_i + bx_iy_i)$

ג. $\sum_{i=1}^4 y_ix_i^2$

ד. $\sum_{i=1}^3 (ax_i + by_i)^2$

ה. $[\sum_{i=1}^3 (ax_i + by_i)]^2$

4. x משתנה אקראי ולו שני אינדקסים. אם נסמן את האינדקס הראשון i ואת האינדקס השני ב j אזי נתון:

$x_{i \setminus j}$	1	2	3	4	5
1	1	0	3	4	-1
2	2	-2	0	2	4
3	3	-2	1	0	2
4	0	5	4	-2	3
5	2	0	2	1	3

חשב:

א. $\sum_{i=1}^3 x_{i3}$

ב. $\sum_{j=1}^5 (x_{2j} + x_{3j})$

ג. $\sum_{i=1}^2 x_{i1} x_{i2}$

ד. $\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 x_{ij}$

ה. $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 x_{ij}^2$

ו. $\sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^3 x_{ij}$

5. במטריצה של שאלה מס' 4 רשום בעזרת Σ או $\sum$:

א. סכום אברי האלכסון הראשי.

ב. סכום האיברים מעל האלכסון הראשי.

6. הוכח :

א. $\sum_{i=1}^n \left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{n} \right) = 0$

ב.
$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \left(y_i - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

סטטיסטיקה תיאורית

תרגיל מס' 2

1. 50 סטודנטים נבחנו בכלכלה, ואלה הציונים שנתקבלו :

35, 50, 35, 71, 81, 57, 65, 84, 77, 65, 52, 85, 33, 60, 77, 45, 53, 59, 73, 55, 91, 61, 41, 80, 54,
68, 47, 64, 65, 42, 73, 66, 94, 60, 76, 39, 67, 85, 69, 48, 55, 78, 41, 66, 98, 88, 89, 94, 40.

א. מיינ את החומר לפי קבוצות.

ב. בנה הסטוגרמה, אשר תכלול 7 קבוצות שוות רוחב, ותאר מצולע שכיחויות.

ג. שרטט גרף שכיחות מצטברת וגרף שכיחות יחסית.

2. לפניך טבלת שכיחויות של מספר מנורות פגומות ב-2002 משלוחים של 6 מנורות בכל אחד :

משלוחים	מנורות פגומות
10	0
27	1
36	2
50	3
35	4
25	5
17	6

א. הצג את הנתונים גרפית.

ב. צייר שרטט גרף שכיחות מצטברת.

3. לפניך נתונים על התפלגות הכנסות

מס' אנשים	הכנסה
6000	0-1000
10000	1000-3000
8000	3000-5000
12000	5000-9000
2000	9000-10000

10000 ומעלה	2000
-------------	------

א. צייר מצולע שכיחויות.

ב. צייר גרף שכיחות מצטברת.

4. נתונה התפלגות הכנסות של 340 עובדים במפעל מסוים, שהם רק חלק מעובדי המפעל :

שכיחות	הכנסה
25	0-200
40	200-400
150	400-600
83	600-800
42	800-1000

בשלב מאוחר יותר התקבלו הנתונים של יתר 160 עובדי המפעל, התפלגות הכנסותיהם היא זו :

שכיחות	הכנסה
15	0-150
30	150-300
80	300-500
25	500-750
10	750-1000

א. צרף את הנתונים שהתקבלו באיחור להתפלגות ההכנסות הראשונה, ובנה לוח שכיחויות.

ב. צרף את שתי קבוצות העובדים, ובנה לוח שכיחות לקבוצה המאוחדת, המבטא את מלוא האינפורמציה שבשני הלוחות הנתונים.

5. לפניך טבלה המציגה משכורת יומית המשולמת ל-2000 עובדים :

משכורת	מס' העובדים
40-60	70
60-80	40
80-100	35
100-120	25
120-140	15
140-160	10
160-180	5

- א. שרטט היסטוגרמה וחשב את השכיח, החציון והממוצע.
 ב. חשב את הרבעונים, והסבר את משמעותם.
 ג. קבע מהי ההכנסה המקסימלית של 30% הפועלים בעלי המשכורת הנמוכה ביותר.

6. במחלקה לכלכלה שנה א' לומדים סטטיסטיקה 150 סטודנטים בשלושה קורסים. את הקורס הראשון מלמד שמעון, ואת שני הקורסים האחרים מלמד לוי. כל התלמידים נגשו למבחן, ובו נתקבלו ממצאים אלה :

שכיחות	ציון
10	30-50
18	50-65
17	65-70
40	70-80
30	80-86
30	86-98
5	98-100

מספר התלמידים בכיתתו של שמעון הוא 50. טווח הציונים בכיתתו הוא בין 50 ל-100, והתפלגות ציוניהם לרוחב טווח זה היא אחידה.

- א. הצג טבלת שכיחויות עבור תלמידי לוי (הכולל 100 תלמידים), כאשר הציונים מחולקים ל-7 מחלקות שוות רוחב. שרטט היסטוגרמה.
 ב. מצא שכיח, ממוצע וחציון עבור המורה לוי.

7. בהתפלגות המנורות הפגומות שבשאלה 2, חשב את הממוצע, החציון והשכיח.

8. בהתפלגות ההכנסות המופיעה בשאלה 3, מצא שני ערכים מרכזיים.
 איזה ערך מרכזי אינך יכול למצוא, ומדוע ?

9. לפניך גרף מצטבר יחסי של התפלגות ההכנסות :

א. חשב את הערכים המרכזים עבור התפלגות זו.

ב. חשב את הרבעונים בהתפלגות זו.

10. בהתפלגות מסוימת אשר חולקה ל-4 קבוצות שוות טווח רוחב :

$$X_{\min}=0; X_{\max}=1200; Q_1=250; Q_2=450; Q_3=675$$

צייר מצולע שכיחויות ומצא את :

$$\bar{X}, \tilde{X}, \bar{X}$$

11. בהתפלגות מסוימת אשר חולקה ל-4 קבוצות שוות רוחב התקבל גרף שכיחות מצטברת זה:

א. חשב את סטיית התקן S.

ב. מהו אחוז הנתונים שערך מרוחק מהממוצע פחות מ-2S?

ג. מהי הסטייה הבין רבעונית.

12. א. קבוצה א' מורכבת מ-5 נתונים. לגבי 4 מהם סטיותיהם מהממוצע הם: 5; 4; 1; 2;

וכן נתון $X_{\min} = 1$, מצא את $\bar{X}$ ואת S.

ב. קבוצה ב' מורכבת מ-5 מספרים עם $\bar{X} = 10$ ו- $S = 4$. אם נאחד את 2 הקבוצות, מה יהיו

$\bar{X}$ ו- S של הקבוצה המאוחדת?

ג. לגבי קבוצה ב' התברר שהמספר 7 כנתון חמישי ההוכנס בה בטעות. חשב את הממוצע

וסטיית התקן של קבוצה ב' המתוקנת.

13. בהתפלגות המשכורת שבשאלה 4 חשב :

א. סטייה ממוצעת.

ב. סטית תקן.

ג. סטייה רבעונית.

- ד. מדד אסמטריה של פירסון.
- ה. סטייה יחסית.
- ו. מהו אחוז העובדים שהכנסתם מרוחקת מהממוצע בפחות מסטיית תקן אחת?
- ז. מהו אחוז העובדים שהכנסתם מרוחקת מהממוצע בפחות מ- 3 סטיות תקן?
14. בקבוצה מסוימת של סטודנטים נתקבלו הציונים הבאים למבחן שנערך :
 $72, 68, 55, 60, 70, 70, 73, 69, 61, 57, 100, 69, 91, 75, 90, 94, 92$
 לאחר בדיקה נוספת של חישובי ציוני שלושת הסטודנטים הרשומים ראשונים (שציוניהם 92, 94, 90), הסתבר, כי יש להכניס תיקון וכי שלושתם זוכים לציון 92.
 איך ישפיע תיקון זה על :-
 א. ממוצע.
 ב. חציון.
 ג. שכיח.
 ד. תחום.
 ה. סטית התקן.
 ו. ציון התקן של הסטודנט בעל הציון הגבוה ביותר.
15. סדרה סטיסטית סימטרית מונה 12 תצפיות : $X_1, X_2, \dots, X_{12}$ נתון, כי ממוצע הסדרה הוא 40. ואילו השונות של הסדרה היא $S^2 = 100$.
 בשלב מאוחר יותר נוספו עוד שתי תצפיות לסדרה : $X_{13}=46, X_{14}=34$.
 א. האם ממוצע הסדרה ישתנה, והאם הוא יגדל או יקטן בעקבות תוספת שני הערכים ?
 נמק את טענתך (נסה לעשות זאת בלי לחשב את הממוצע החדש).
 ב. האם שונות הסדרה תשתנה, והאם היא תגדל או תקטן בעקבות תוספת שני הערכים ?
 נמק את טענתך (אין צורך לחשב את ערך השונות החדשה).
 ג. האם התחום של הסדרה ישתנה, והאם הוא יגדל או יקטן בעקבות תוספת שני הערכים ?
 נמק את טענתך.
16. במחקר חינוכי התעורר הצורך לבנות קבוצת ביקורת שתהיה דומה לקבוצת הניסוי מבחינות מסוימות. קבוצת הניסוי מנתה 12 ילדים, והחוקר החליט שזה יהיה גם גודל קבוצת הביקורת. הממוצע והשונות של משתנה X בקבוצת הניסוי היו 6.0 ו- 14.00, בהתאמה. החוקר שאף לכך שלשתי הקבוצות יהיו אותו ממוצע ואותה שונות במשתנה הנזכר.
 לאחר שנבחרו 10 הילדים הראשונים לקב' הביקורת (לפי הקריטריונים שהוצבו), התברר כי הממוצע של 10 ילדים אלה במשתנה X היה 5.8, והשונות שלהם הייתה 16.36.
 מה צריכים להיות ערכי X של שני הילדים הנוספים, שייבחרו לקב' הביקורת, כך שלשתי הקבוצות יהיו ממוצעים שווים ושונות שוות ?

17. השכר היומי הממוצע במפעל הוא 200 ש"ח, סטית התקן של השכר היומי באותו מפעל היא 50 ש"ח.

מפעל ב' מעסיק מס' עובדים גדול פי שלושה מזה שבמפעל א', ומשלם לעובדיו שכר אחיד של 200 ש"ח ליום.

- א. מהו ממוצע השכר היומי של הפועלים בשני המפעלים יחד ?
 ב. מהי סטית התקן של שכר הפועלים בשני המפעלים יחד.

18. א. נתונה טבלת השכיחויות של 90 ציונים במתמטיקה (משתנה X):-

שכיחות	ציונים
10	50-60
20	60-70
30	70-80
20	80-90
10	90-100

עבור נתונים אלו חושבו המדדים הבאים : ממוצע, חציון, שכיח, תחום, סטית תקן ורבעון ראשון. לאחר מכן צורפו לקבוצה זו עוד 10 ציונים של תלמידים שנבחנו באיחור. לגביהם התברר שבכל רמת ציונים נמצאים 2 תלמידים.

- א. מה יהיו עתה המדדים החדשים, האם ניתן להגיע לכיוון השינוי ללא חישוב מלא ?
 ב. התייחס ל- 90 הנתונים הראשונים שבסעיף א', עתה הוסיפו לקב' זו קבוצת תלמידים נוספת שאף היא בגודל 90, והתפלגות השכיחות שלה זהה לקבוצה הראשונה.
 מה תוכל לומר על 6 הערכים דלעיל בקבוצה המאוחדת ? מהי מסקנתך הכללית ?
 ג. התייחס לטענה הבאה :

" בבדיקת ההכנסה בשתי קבוצות עובדים נתקבלו בקבוצה א' n_1 עובדים עם ממוצע $\bar{X}_1$ וסטית תקן S_1 .

בקבוצה ב' n_2 עובדים עם ממוצע $\bar{X}_2$ וסטית תקן S_2 .

אם נאחד את שתי הקבוצות יהיה תמיד ממוצע הקבוצה המאוחדת נמצא בין $\bar{X}_1$ ל- $\bar{X}_2$ וסטית התקן של הקבוצה המאוחדת בין S_1 ל- S_2 ."

חוה דעתך.

19. בהתפלגות אסימטרית חיובית דרג לפי גודל את :

$$\tilde{X} = \frac{P_{24} + P_{76}}{2} \quad \frac{Q_3 + Q_1}{2}$$

20. בהתפלגות המשכורת שבתרגיל 4 חשב את מדד האסמטריה של פירסון.

21. נתונה סדרה הכוללת n ערכים שהתפלגותה סימטרית.

שני ערכים נוספים A ו- B צורפו לסדרה. האחד קטן מהחציון וגדול מהרביעון התחתון $(Q_1 < A < \tilde{X})$ והשני גדול מהערך המקסימלי של הסדרה $(B > X_{\max})$.

א. האם, וכיצד, ישתנה החציון על ידי הוספת שני הערכים האלה ? נמק.

ב. האם, וכיצד, ישתנה הממוצע האריתמטי על ידי הוספת שני ערכים אלה ? נמק.

חשבון מאורעות

תרגיל מס' 3

1. בסקר דעת קהל שנערך בישראל ב-1995, נשאלו זוגות נשואים על אופן הצבעתם בבחירות בין העבודה, ליכוד ואחרים.

א. מהו אוסף כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם (Ω).

ב. תאר את המאורעות הבאים :

(1) לשני בני הזוג העדפה זהה.

(2) לשני בני הזוג העדפה שונה.

הערה: לכל אחד מהשניים הייתה אפשרות לענות על 3 תשובות אפשריות : מערך, ליכוד ואחרים.

2. בכד 3 פתקים. הפתקים ממוספרים בהתאמה: 1,2,3. מוציאים פתק באופן מקרי, ואחר מוציאים פתק נוסף.

תאר את מרחב המדגם במקרים הבאים:

א. אם לא מחזירים את הפתק הראשון קודם להוצאת הפתק השני.

ב. אם מחזירים את הפתק הראשון לפני הוצאת הפתק השני.

3. תאר את מרחב המדגם הנוצר ע"י הניסויים הבאים:

א. זריקת מטבע 3 פעמים בזה אחר זה.

ב. משאל, האם הקהל צופה ב- 3 תוכניות טלוויזיה מסוימות.

4. במשפחות בנות 3 ילדים כל אחת, יצוינו המאורעות הבאים:

A = הבכור בן.

B = האמצעי - בת.

C = הקטן - בן.

בטא את המאורעות הבאים באמצעות A, B, C :

א. שלושת הילדים בנים

ב. שלושת הילדים בנות

ג. במשפחה שני בנים ובת

ד. במשפחה לפחות בת אחת

ה. במשפחה לכל היותר שני בנים

6. בכיתה מסוימת הוגדרו :

- A קבוצת התלמידים הדוברים עברית.
 B קבוצת התלמידים הדוברים צרפתית.
 C קבוצת התלמידים הדוברים אנגלית.
 השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור הקבוצות הבאות :

- א. קבוצת התלמידים דוברי כל שלוש השפות.
 ב. קבוצת התלמידים דוברי אחת השפות הנ"ל לפחות.
 ג. קבוצת התלמידים דוברי אחת השפות הנ"ל בדיוק.
 ד. קבוצת התלמידים שאינם דוברי עברית.
 ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).
 ו. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות לפחות (מהשפות הנ"ל).

7. נתונה קבוצה של 200 סטודנטים למקצועות כלכלה, ספרות ומוסיקולוגיה (חלקם לומד יותר ממקצוע אחד).

תהי A- קבוצת הלומדים כלכלה,

B- קבוצת הלומדים ספרות,

C- קבוצת הלומדים מוסיקולוגיה.

כן נתון : מספר הסטודנטים ב- $A \cap B$ הוא 18

ב- $(A \cup B) \cap \bar{C}$ הוא 142

ב- $C \cap \bar{A} \cap \bar{B}$ הוא 25

ב- $(B \cup C) \cap \bar{A}$ הוא 102

ב- $B \cap \bar{A} \cap \bar{C}$ הוא 57

ב- $A \cap C \cap \bar{B}$ הוא 10

א. הסבר מילולית מה משמעות כל אחד מהנתונים הנ"ל, וצייר דיאגרמת ואן.

ב. בטא כל אחת מהקבוצות הבאות באמצעות A, B ו- C.

(ע"י פעולות חיתוך, איחוד ומשלים) וחשב כמה סטודנטים :

(1) לומדים 3 מקצועות.

(2) לומדים כלכלה.

(3) לומדים מוסיקולוגיה.

(4) לומדים ספרות.

(5) לומדים 2 מקצועות.

8. בפני סטודנט עומדות 3 אפשרויות לבילוי הערב: לצאת לקולנוע, להתכונן למבחן או ללכת לישון.

הוא בוחר באחת מביניהן.

רשום את המאורעות הבאים בעזרת ה- 3 הנ"ל:

א. לא יצא לקולנוע

ב. לא יתכונן לבחינה

ג. יצא לקולנוע או יתכונן לבחינה

ד. יצא לקולנוע ויתכונן לבחינה

ה. לא יצא לקולנוע ולא יתכונן לבחינה.

קומבינטוריקה

תרגיל מס' 4

1. בכמה אופנים ניתן לסדר 6 חיילים?
 - א. כל ספרה מופיעה רק פעם אחת.
 - ב. כל ספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת.
 - ג. בתנאי סעיף א', כמה זוגיים וכמה אינם זוגיים?
 - ד. הספרה האחרונה חייבת להיות 0 או 2, וכל ספרה מופיעה רק פעם אחת?
2. כמה מספרים בעלי 3 ספרות אפשר ליצור בעזרת הספרות 0, 1, 2, 3, 4 בכל אחד מן התנאים הבאים:
 - א. כל ספרה מופיעה רק פעם אחת.
 - ב. כל ספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת.
 - ג. בתנאי סעיף א', כמה זוגיים וכמה אינם זוגיים?
 - ד. הספרה האחרונה חייבת להיות 0 או 2, וכל ספרה מופיעה רק פעם אחת?
3. בכמה אופנים אפשר לבחור ועד של 4 אנשים מקבוצה של 9 אנשים?
 - א. כל ספרה מופיעה רק פעם אחת.
 - ב. כל ספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת.
 - ג. בתנאי סעיף א', כמה זוגיים וכמה אינם זוגיים?
 - ד. הספרה האחרונה חייבת להיות 0 או 2, וכל ספרה מופיעה רק פעם אחת?
4. בכמה אופנים אפשר לבחור ועד של 5 גברים ו-4 נשים, מקבוצה של 8 גברים ו-6 נשים?
 - א. כל ספרה מופיעה רק פעם אחת.
 - ב. כל ספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת.
 - ג. בתנאי סעיף א', כמה זוגיים וכמה אינם זוגיים?
 - ד. הספרה האחרונה חייבת להיות 0 או 2, וכל ספרה מופיעה רק פעם אחת?
5. מקבוצה בת 11 גברים ו-4 נשים, בוחרים במשלחת של 5 חברים.

חשב את מספר האפשרויות לבחור:

 - א. 5 אנשים כלשהם.
 - ב. 3 גברים ו-2 נשים.
 - ג. לפחות 2 נשים.
 - ד. רוב הנבחרים יהיו גברים.
 - ה. לכל היותר 2 גברים.
 - ו. לפחות אשה אחת.
6. 11 מושבים הממוספרים מ-1 עד 11 יש להושיב 6 גברים ו-5 נשים, כך שהגברים ישבו במקומות האי זוגיים. בכמה ואפנים ניתן להושיבם?
 - א. כל ספרה מופיעה רק פעם אחת.
 - ב. כל ספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת.
 - ג. בתנאי סעיף א', כמה זוגיים וכמה אינם זוגיים?
 - ד. הספרה האחרונה חייבת להיות 0 או 2, וכל ספרה מופיעה רק פעם אחת?
7. על מדף יש לסדר 5 ספרים שונים בכלכלה, 3 ספרים שונים בסטטיסטיקה ו-4 ספרים שונים במתמטיקה. כמה סידורים שונים אפשריים בכל אחד מתנאים אלו:
 - א. ללא הגבלה.
 - ב. הספרים שמאותו מקצוע יהיו זה ליד זה, ללא חציצה ביניהם.
 - ג. רק הספרים בכלכלה יהיו זה ליד זה כנ"ל.

7. א. כמה מספרים בני 8 ספרות אפשר ליצור עם:
 3 ספרות השוות כל אחת ל-2, 2 ספרות השכ"א 4, 2 ספרות השכ"א ל-5 ואחת השווה ל-6?
 ב. כמה מספרים בני 3 ספרות אפשר ליצור עם הספרות דלעיל?
8. מצא את סכום כל המספרים בעלי 4 ספרות שניתן לרשום בעזרת הספרות: 1, 3, 5, 7,
 א. כשכל הספרות בכל מספר שונות זו מזו.
 ב. ללא ההגבלה הנ"ל.

הסתברות

תרגיל מס' 5

1. בכיתה 40 תלמידים, מתוכם 13 בנות. ועד של 4 תלמידים נבחר מתוך תלמידי הכיתה. חשב את ההסתברות לכל אחד ממאורעות אלו :
 - א. כל התלמידים בועד בנים.
 - ב. בועד יותר בנות מבנים.
 - ג. בועד יותר בנים מבנות.
 - ד. לפחות בת אחת בועד.
2. אדם הניגש למבחן נהיגה (תיאוריה) יודע 15 מתוך 18 תמרורי תנועה. הוא מתבקש לזהות 5 תמרורים, ומקבל ציון "נכשל", אם שגה ביותר מתמרור אחד. מה ההסתברות שלא ייכשל במבחן ?
3. מה ההסתברות שבקבוצה של 10 אנשים לא ימצאו שנים שיום הולדתם חל באותו יום בשנה? (בשנה 365 יום).
4. בבחינה יש 10 שאלות של נכון/לא נכון. על מנת לעבור את הבחינה יש לענות לפחות על 80% מהשאלות נכון. במידה והסטודנט הוא מסוג "מהמר" (ינחש את התשובות), מה ההסתברות שיעבור את הבחינה ?
5. בכד 10 כדורים ממוספרים מ-1 עד 10. 5 כדורים הוצאו ללא החזרה. מה ההסתברות לכך שהכדור הנושא את המספר 8 יהיה בעל המספר השני בגודלו ?
6. בוחרים באקראי 4 מספרים מבין המספרים 1 עד 9, ללא חזרה. מה ההסתברות שסכומם של המספרים שנבחרו הוא זוגי ? מה ההסתברות שסכומם אי-זוגי ?
7. יש להושיב קבוצה של 5 בנים ו-5 בנות בשורה. חשב את הסתברות המאורעות כדלקמן :-
 - א. חמשת הבנים ישבו זה ליד זה.
 - ב. חמשת הבנים וגם חמש הבנות ישבו זה ליד זה.
 - ג. הבנים והבנות ישבו לסירוגין.
 - ד. בן ובת מסוימים ישבו זה ליד זה.

8. בחברת מחשבים עובדים 5 מתכנתים, 5 אנשי מכירות, 5 מנתחי מערכות, 5 אנשי מנהלה. כל שנה בוחרים באקראי 5 עובדים הנשלחים להשתלמות.
- מה ההסתברות שכל 5 המשתלמים שייכים לאותו מקצוע ?
 - מה ההסתברות שה- 5 יכללו אנשים מכל ארבעת המקצועות ?
 - מה ההסתברות שה- 5 יכללו שני אנשי מכירות ?
9. 5 שחקני כדורסל, השונים זה מזה בגובהם, מסתדרים באופן מקרי בשורה אחת. מהי ההסתברות:
- שהשחקנים יסתדרו לפי הגובה (עולה או יורד)?
 - שהנמוך והגבוה יעמדו במקומות הקיצוניים?
10. א. כמה מספרים בני 4 ספרות ניתן להרכיב מהספרות : 2 4 8 3 5 6 ?
 ב. מהי ההסתברות, שיורכב מספר, שכל ספרה בו מופיעה פעם אחת לכל היותר ?
 ג. מה ההסתברות, שהמספר מתחיל ב- 5 (כל ספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת) ?
11. מסלול של אוטובוס שבו 4 נוסעים, כולל 7 תחנות הורדה. מה ההסתברות שבאף תחנה לא ירד יותר מנוסע אחד?
12. מהספרות 1 2 3 4 5 יוצרים מספר בין 5 ספרות.
 חשב את ההסתברות ש:
 א. כל הספרות שונות.
 ב. המספר קטן מ- 30000 (כל ספרה יכולה לחזור על עצמה מספר פעמים).
 ג. המספר זוגי.
 ד. כל הספרות שונות והמספר זוגי.
13. מה ההסתברות ש- 3 הספרות האחרונות במספר תעודת הזהות של אזרח שונות זו מזו?
14. כדי לקבל אישור תקן, צריך מכשיר מסוים לעבור בהצלחה שתי בדיקות:
 בדיקה א' - שההסתברות לעובר בהצלחה היא 0.9.
 בדיקה ב' - שההסתברות לעובר בהצלחה היא 0.8.
 אם ידוע שההסתברות שמכשיר זה יעבור לפחות את אחת הבדיקות היא 0.95 -
 מה ההסתברות שמכשיר זה יקבל את תו התקן ?
 מה ההסתברות שמכשיר זה לא יקבל את תו התקן ?

15. בקורס בסטטיסטיקה ניתנו 3 מבחנים.

15% נכשלו במבחן א'.

20% נכשלו במבחן ב'.

14% נכשלו במבחן ג'.

8% נכשלו במבחנים א' ו- ב'.

5% נכשלו במבחנים ב' ו- ג'.

4% נכשלו במבחנים א' ו- ג'.

2% נכשלו בכל שלושת המבחנים.

איזה אחוז מהכיתה נכשל לפחות במבחן אחד ?

16. באוכלוסייה מסוימת, שמספר הגברים בה שווה למספר הנשים, $\frac{1}{3}$ מהאנשים מעשנים ו- $\frac{1}{10}$

חולי לב. כמו כן ידוע ש- 20% מהאוכלוסייה הם גברים מעשנים, 8% הם גברים חולי לב, 5% הם

חולי לב שמעשנים ו- 4% הם גברים חולי לב שמעשנים.

אדם נבחר באופן מקרי. מה ההסתברות שהוא יהיה גבר או חולה לב או מעשן ?

הסתברות מותנית, תלות ואי תלות

תרגיל מס' 6

1. תלמיד מחפש נוסחה ב- 3 ספרים. הסיכוי שימצא אותה בספר א' הוא 0.6, בספר ב' 0.7 ובספר ג' 0.8.
חשב את ההסתברויות למאורעות אלה :-
 א. הנוסחה נמצאת בספר א', ולא נמצאת בספרים ב' ו- ג'.
 ב. הנוסחה נמצאת בלפחות אחד מבין שלושת הספרים.
 ג. הנוסחה לא נמצאת באף אחד מהספרים.
2. 3 קלעים יורים במטרה. הסיכוי לראשון שיפגע הוא $\frac{1}{6}$ לשני $\frac{1}{7}$ ולשלישי $\frac{1}{8}$.
חשב את ההסתברויות כדלקמן :-
 א. רק אחד מהם יפגע במטרה.
 ב. לפחות אחד מהם יפגע במטרה.
 ג. לכל היותר אחד מהם יפגע במטרה.
3. על כביש בין שתי ערים נמצאים 3 רמזורים, מחזור שלם של כל רמזור הוא דקה אחת.
ברמזור הראשון דולק האור הירוק 30 שניות.
ברמזור השני דולק האור הירוק 40 שניות.
ברמזור השלישי דולק האור הירוק 50 שניות.
מה ההסתברות שמכונית תיעצר ע"י רמזור אחד בלבד (שבו תפגע באור שאינו ירוק) ?
הסבר את שיקול דעתך והנחותיך לצורך הפתרון.
4. עשרה אנשים נשלחים למצוא מטמון. כל אחד מהעשרה מנסה למצוא את המטמון באופן בלתי תלוי בחברו.
ההסתברות שאדם יטעה בדרך למטמון היא $\frac{1}{5}$ וההסתברות שאדם שהגיע אל המטמון ימצא אותו היא $\frac{1}{8}$.
 א. מה ההסתברות של כל אחד מהם למצוא את המטמון ?
 ב. מה ההסתברות שהמטמון יימצא (לפחות ע"י אחד) ?

5. אחוז התלמידים המצטיינים בכתה הוא 15%.
 אחוז הנשים בכיתה הוא 60%.
 מבין התלמידים שהינם מצטיינים, אחוז הנשים הוא 25%.
 מצא :-
 א. אחוז הנשים שהן גם תלמידות מצטיינות (מתוך כלל התלמידים בכיתה).
 ב. אחוז הגברים שהם גם תלמידים מצטיינים (מתוך כלל התלמידים בכיתה).
 ג. נבחר תלמיד באקראי. מה הסיכוי שהיא אישה או תלמיד מצטיין ?
6. דן, גד ונחום רוצים לשאול את אותו הספר בספריה, אך יש רק עותק אחד שלו.
 הספרן מציע שהחלטה, למי להשאיל את הספר, תעשה באופן הבא :
 הספרן יבחר סיפרה אחת מ- 3 ספרות נתונות. דן ינסה לנחש את הספרה. אם ניחש נכון יקבל את הספר, אחרת יוכל גד לנסות כוחו בניחוש (גד יודע על ניחושו של דן). אם ניחש נכון יקבל את הספר, אחרת יינתן הספר לנחום. נחום טוען כי הספרן אינו הוגן כלפיו.
 האם צדק ?
7. בדיקה רפואית לגילוי מחלה מסוימת יעילה ב- 85% בזיהוי החולים, וב- 90% בזיהוי הבריאים.
 הרופאים סבורים, שאחוזי הטעויות גבוהים מדי, ולכן הציע הסטטיסטיקאי שלהם לבצע על כל חולה את הבדיקה 3 פעמים. אם לפחות ב- 2 מתוך הבדיקות התקבלה התוצאה "חולה", יוכרז האדם כחולה, אחרת יוכרז כבריא.
 נקרא לבדיקה חדשה זו בשם "הבדיקה המשולשת".
 א. מה ההסתברות שאדם חולה יזוהה ע"י הבדיקה המשולשת כחולה ?
 ב. מה ההסתברות שאדם בריא יזוהה ע"י הבדיקה המשולשת כבריא ?
8. רכיב מסוים של מכונה בנוי משלושה חלקים המחוברים בטור, והוא פועל רק אם שלושת החלקים פועלים. המכונה בנויה משני רכיבים כאלה המחוברים במקביל, והיא פועלת, אם פועל לפחות אחד משני הרכיבים. לכל אחד משלושת החלקים של הרכיב יש הסתברות של 0.9 שיפעל.
 מה ההסתברות שהמכונה תפעל ?
9. ידוע שכל אדם באוכלוסייה מסוימת קורא לפחות אחד משני העיתונים A ו- B.
 ידוע כי 60% קוראים עיתון A, ו- 20% מקוראי עיתון A, קוראים גם את B. אם ידוע שאדם קורא עיתון B, מה ההסתברות שהוא קורא גם את A ?

10. השלם את חישוב כל ההסתברויות החסרות בלוח הבא, וענה בכל שורה על שאלת התלות בין A ל-B.

האם A ו-B תלויים/בלתי תלויים	$P(A \cup B)$	$P(A \cap B)$	$P(B/A)$	$P(A/B)$	$P(B)$	$P(A)$
		0.2			0.3	0.5
	0.6	0			0.4	
		0.2	0.5		0.5	
	0.6				0.2	0.6
	0.3	0				0.3
				0.7	1	
	1		0			0.2
	0.8	0.4	0.8			

נוסחת ההסתברות השלמה ומשפט בייס

תרגיל מס' 7

1. נורות חשמל מיוצרות ע"י 4 מכוניות שונות. כמות הנורות המיוצרות, ואחוז נורות החשמל הפגומות בכל מכונה, מצוינים בלוח הבא :

מכונה	1	2	3	4
כמות נורות	200	300	150	350
אחוז נורות פגומות	1%	2%	3%	4%

- א. מה ההסתברות לנורה פגומה ?
- ב. התגלה נורה פגומה; מה ההסתברות שהיא יוצרה ע"י מכונה i ($i=1,2,3,4$) ?
2. כד א' מכיל שתי מטבעות זהב ושבע מטבעות נחושת, כד ב' מכיל מטבע זהב אחת וארבע נחושת. מעבירים באקראי שתי מטבעות מכד א' לכד ב', ואחר כך מוציאים מכד ב' מטבע אחת.
- א. מה ההסתברות שהוצאה מטבע זהב ?
- ב. התברר שהוצאה מטבע זהב. מה ההסתברות, שהעבירו קודם מכד א' לכד ב' שתי מטבעות זהב ?
3. במשרד שלוש פקידות : שרון, אביטל ואורנה.
- שרון מדפיסה 15% מהעבודות, ומסיימת 80% מהן במועד.
- אביטל מדפיסה 40% מהעבודות, ומסיימת במועד 70% מהן.
- אורנה מדפיסה את השאר, ומסיימת במועד 70% מהן.
- א. מה הסיכוי שעבודת ההדפסה תסתיים בזמן ?
- ב. אם עבודה מסוימת נסתיימה בזמן, מה ההסתברות שאביטל הדפיסה אותה ?
- ג. אם עבודה לא נסתיימה בזמן, מה הסיכוי שאביטל או שרון הדפיסו אותה ?
4. "מכונת אמת" מגלה סטודנט שהעתיק בבחינה בהסתברות של 90%. אם הוא לא העתיק, המכונה "תסכים" לכך בהסתברות של 95%.
- סטודנט נבחר באופן מקרי, והמכונה טענה שהעתיק.
- מה ההסתברות שהסטודנט אכן העתיק, אם אחוז הסטודנטים המעתיקים הוא 30% ?

5. בערימת פצצות $1/3$ מהן בנות 100 ק"ג ו- $2/3$ מהן בנות 200 ק"ג. כל הפצצות בנות ה- 100 ק"ג תקינות, ורק מחצית הפצצות בנות ה- 200 ק"ג תקינות.

פצצה נבחרה באופן מקרי. חשב עבורה את ההסתברויות הבאות ?

- א. הפצצה תקינה.
- ב. הפצצה פגומה.
- ג. הפצצה בת 100 ק"ג ותקינה.
- ד. הפצצה בת 100 ק"ג ופגומה.
- ה. הפצצה בת 200 ק"ג ותקינה.
- ו. הפצצה בת 200 ק"ג ופגומה.
- ז. אם ידוע שהפצצה תקינה, מה ההסתברות שמשקלה 100 ק"ג ?
- ח. אם ידוע שהפצצה תקינה, מה ההסתברות שמשקלה 200 ק"ג ?
- ט. אם ידוע שהפצצה פגומה, מה ההסתברות שמשקלה 100 ק"ג ?
- י. אם ידוע שהפצצה פגומה, מה ההסתברות שמשקלה 200 ק"ג ?
- יא. אם ידוע שמשקלה 100 ק"ג, מה ההסתברות שהיא פגומה ?
- יב. אם ידוע שמשקלה 200 ק"ג, מה ההסתברות שהיא תקינה ?

6. בקופסא A 10 כדורים לבנים ו- 25 אדומים.

בקופסא B 30 כדורים לבנים ו- 20 אדומים.

בקופסא C 20 פתקים המסומנים במספרים מ- 1 עד 20

מוציאים באקראי פתק מקופסא C; אם המספר שהתקבל קטן מ- 6, מוציאים כדור מקופסא A, ואם אחרת מקופסא B.

- א. מה ההסתברות להוצאת כדור אדום מקופסא A ?
- ב. מה ההסתברות להוצאת כדור לבן (מקופסא כלשהיא) ?

7. 2 חברות מוניות: הכחולות והירוקות, פועלות בעיר מסוימת. 85% מהמוניות בעיר הן כחולות ו- 15% ירוקות.

לילה אחד ארעה תאונת "פגע וברח", שבה הייתה מעורבת מונית. עד ראיה טען, שהמונית הייתה ירוקה. כושר ההבחנה של העד, בתנאי התאורה של שעת ומקום התאונה, נבדק ע"י בית המשפט. נמצא כי הוא עורך זיהוי צבע נכונים ב- 80% מהמקרים המוצגים לפניו (וטועה ב- 20% מהם).

- א. מה ההסתברות, שהמונית המעורבת בתאונה הייתה ירוקה, לאחר שמיעת העדות הנ"ל ?
- ב. בהמשך החקירה הגיע עד נוסף, אשר טען אף הוא, באופן בלתי תלוי בעדות הראשונה, כי ראה שהמונית הפוגעת הייתה ירוקה. התברר כי כושר ההבחנה שלו זהה לזה של העד הראשון.

שני שופטים דנו במקרה.

שופט א' ("הקלאסי") החליט כי ימצא את חברת המוניות הירוקות אשמה, אם יתברר, כי ההסתברות לקבל את שתי העדויות הללו, בתנאי שהמונית הפוגעת הייתה כחולה, תהיה קטנה מ-5%.

שופט ב' ("הבייזיאני") החליט, כי יחשב את ההסתברות, שהמונית הפוגעת הייתה ירוקה, לאור שתי העדויות שנתקבלו, ויחליט, כי חברת המוניות הירוקות אשמה, אם הסתברות זו תעלה על 95%.

ערוך את החישוב הדרוש לכל אחד משני השופטים, וקבע את מסקנתו.

משתנה מקרי בדיד

תרגיל מס' 8

1. טכנאי היוצא לתקן רכיבים במחשב יודע, כי 40% מהרכיבים דורשים שעה אחת לתיקונם, 20% מהרכיבים דורשים שעתיים לתיקונם, והשאר דורשים 3 שעות לתיקונם. הטכנאי יוצא לתקן שני רכיבים.

א. מהי פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X , המוגדר כמשך הזמן הדרוש לתיקון שני הרכיבים?

ב. מה תוחלת המשתנה X ?

2. מבחן מורכב מ-6 שאלות, לכל שאלה 3 תשובות אפשריות, מהן רק אחת נכונה. ראובן ניגש למבחן ללא הכנה, ומחליט לענות עפ"י ניחוש בלבד. יהי X מספר התשובות הנכונות של ראובן. חשב את פונקציית ההסתברות של X , את תוחלתו ושונותו.

3. בכד 5 כדורים הממוספרים מ-1 עד 5. מוציאים מהכד 2 כדורים שונים (היינו אחד אחרי השני ללא החזרה).

אם הוצאו הכדורים שמספרם 4 ו-5, זוכה המוציא ב-10 ש"ח.

אם הוצא אחד מהכדורים 4 או 5 וכן הכדור 1, זוכה המוציא ב-5 ש"ח.

אם הוצא אחד מהכדורים 4 או 5 וכן כדור שאינו 1, זוכה המוציא ב-1 ש"ח.

כל צירוף אחר של כדורים אינו מזכה כלל.

יהי X סכום הזכייה, קבע את פונקציית ההסתברות של X ואת תוחלתו.

4. בחידון נשאלו 4 שאלות.

ההסתברות לתשובה נכונה בשאלה הראשונה היא 0.4, בשניה 0.3, בשלישית 0.2 וברביעית 0.1.

הנשאל עונה על השאלות כפי סידורן, אך אם לא ענה נכון על שאלה כלשהיא, הוא יוצא מהחידון, ולא יוצגו לו השאלות הבאות.

אם ענה נכון רק על השאלה הראשונה - זכה ב-200 ש"ח; על שתי שאלות יקבל 400 ש"ח; על 3 - 800 ש"ח ועל 4 - 1600 ש"ח.

א. יהי X סכום הזכייה. מצא את פונקציית ההסתברות של X ואת תוחלתו.

ב. נשאל מסוים הגיע לשאלה השלישית. מה ההסתברות שנשאל זה יענה נכון על כל השאלות?

5. כד מכיל 10 כדורים, הממוספרים מ-1 עד 10. מוציאים 4 כדורים ללא החזרה.
 א. נגדיר את X כמספר השני בין ה-4, כשהם מסודרים בסדר עולה.
 חשב את פונקציית ההסתברות של X .
 ב. מהי ההסתברות שהמספר 10 לא ייכלל בין ה-4 ?
6. ידוע, כי גבר משוחח שיחת טלפון במשך 10 דקות, אשה - 60 דקות ונערה - 40 דקות.
 במשפחה יש גבר, שתי נשים ו-3 נערות. כאשר מצלצל הטלפון, ניגש אחד מהם באקראי ומשוחח כדלעיל.
 יהי X משך זמן של שיחה אחת, Y משך הזמן של שתי שיחות. חשב את פונקציית ההסתברות, התוחלת והשונות של X וכן של Y .
7. בחדר א' נמצאות 3 נשים שמשקלן 57, 59 ו-61 ק"ג.
 בחדר ב' נמצאים 3 גברים שמשקלם 70, 71 ו-72 ק"ג.
 בוחרים חדר באופן מקרי, ומוציאים ממנו אדם.
 א. חשב תוחלת ושונות של משקל האדם שנבחר.
 ב. אם ידוע, שהאדם שנבחר מחדר א', חשב את התוחלת והשונות של משקלו.
 ג. אם ידוע, שהאדם שנבחר מחדר ב', חשב את התוחלת והשונות של משקלו.
 ד. עליך לנחש את משקל האדם שיבחר. אם תשגה בניחוש תפסיד סכום השווה בשקלים לריבוע השגיאה שלך. מהו הניחוש הטוב ביותר, ומהו הפסדך הממוצע ?
 ה. אם לפני שתנחש, יאמרו לך איזה חדר נבחר, כיצד תנחש ?
8. נתונה התפלגות המשתנה X המוגדר כ"ביקוש למוצר מסוים".

$$P(x=i) = \begin{cases} \frac{k-i}{3k} & i=0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
 א. חשב את k .
 ב. מהי התוחלת והשונות של X .
 ג. את המוצר הנ"ל ניתן לייצר באחת מ-3 האלטרנטיבות הבאות :
 (1) שלוש יחידות ליום, בהוצאה של 10 ש"ח ליחידה.
 (2) ארבע יחידות ליום, בהוצאה של 10 ש"ח ליחידה.
 (3) חמש יחידות ליום, בהוצאה של 7 ש"ח ליחידה.
 את המוצר לא ניתן לאגור ולשמור מיום אחד למשנהו. המחיר שיקבל היצרן על כל יחידת מוצר הוא p , באיזה אלטרנטיבה יבחר היצרן, אם הוא מעוניין בתוחלת רווח מקסימלית ? (שים לב שהאלטרנטיבה שיבחר תלויה ב p).

9. להלן כללי משחק הימורים המבוסס על הטלת 2 קוביות.

- א. דמי ההשתתפות במשחק הם 20 ש"ח.
 - ב. אם בשתי הקוביות מופיע מספר זהה, המהמר זוכה ב- 50 ש"ח.
 - ג. אם סכום התוצאות הוא 7, המהמר זוכה ב- 40 ש"ח.
 - ד. אם סכום התוצאות גדול מ- 10 או קטן מ- 4, המהמר זוכה ב- 30 ש"ח.
 - ה. אם מתקיימים שניים מהתנאים הנ"ל, זוכה המהמר בסכום הזכויות המתאימות.
- (1) בנה את פונקציות ההסתברות עבור הרווח של המהמר מהמשחק.
- (2) האם כדאי למהמר להשתתף במשחק זה ?

התפלגות משותפת

תרגיל מס' 9

1. יהיו X - הכנסה חודשית ו- Y צריכה חודשית. פונקציות ההסתברות המשותפת נתונה בטבלה :

$x \backslash y$	800	900	1000
1000	$1/3$	$1/6$	0
1200	$1/12$	$1/12$	$1/6$
1500	0	$1/12$	$1/12$

מצא :

- א. $P(x = 1000)$
- ב. $P(x \geq 1200)$
- ג. $P(y = 900)$
- ד. $P(y \leq 900)$
- ה. $P(\text{חיסכון} \geq 100)$
- ו. $P(y \geq x)$
- ז. $P(y \leq x)$
- ח. $E(x - y)$

2. נתונה פונקצית ההסתברות המשותפת של X ו- Y :

$x \backslash y$	1-	2	3
0	0.03	0	0.17
1	0.1	0.2	0.25
2	0	0.25	0

- א. חשב את ההסתברויות השוליות של x ו- y .
- ב. חשב : $\rho(x, y)$, $E(x)$, $E(y)$, $v(x)$, $v(y)$, $\text{cov}(x, y)$.
- ג. האם x ו- y בלתי תלויים ?
- ד. חשב : $P(x=1/y=2)$, $P(y=2/x=2)$, $E(y/x \leq 1)$.
- ה. יהי $T = x + y$. חשב את פונקצית ההסתברות של T , את $E(T)$ ואת $\text{var}(T)$.
- ו. יהי $V = x \cdot y$, חשב את פונקצית ההסתברות של V , תוחלתו ושונותו.

3. יהי X ציון בסטטיסטיקה ו- Y ציון במבוא לכלכלה. התפלגותם המשותפת נתונה בטבלה.

$X \backslash Y$	0-30	30-50	50-70	70-100
0-30	0.1	0.2	0	0
30-50	0	0.1	0.05	0
50-70	0	0.05	0.4	0
70-100	0	0	0	0.1

- א. חשב את EX ואת EY .
- ב. חשב את התוחלת המותנית של Y עבור כל אחת מ-4 הקטגוריות של X (כלומר: $E(Y / 0 \leq X \leq 30)$, $E(Y / 30 \leq X \leq 50)$ וכו').
- ג. האם קיים קשר בין $E(Y)$ לבין התוחלות המותנות שבחלק ב'? בדוק והסבר.
- ד. חשב את $\text{cov}(X, Y)$ ואת מקדם המתאם $\rho(X, Y)$. האם קיים קשר בין שני המשתנים? נמק.

4. A ו- B שתי חברות המייצרות מוצר זהה. יהי X רווח חברה A , Y רווח חברה B . ההתפלגות המשותפת של X ו- Y נתונה בטבלה.

$X \backslash Y$	10-	0	20	60
20-	1/9	1/27	1/27	1/9
10	3/9	0	1/9	1/9
30	0	0	1/9	1/27

- א. מצא את ההסתברות שחברה A תפסיד.
- ב. מצא את ההסתברות ששתי החברות ירוויחו.
- ג. מצא את תוחלת הרווח של חברה A .
- ד. שתי החברות החליטו להתאחד. Z רווח החברה המאוחדת. מצא את פונקציית ההסתברות של Z .

5. כד מכיל 9 כדורים, על שניים מהם רשום המספר 1, על שלשה מהם רשום המספר 2, ועל ארבעה המספר 3. מוציאים באקראי שני כדורים עם החזרה. יהי X המספר שהופיע בכדור הראשון, Y המספר שהופיע בכדור השני. חשב את פונקציית ההסתברות, התוחלת והשונות של:

- א. X
- ב. Y
- ג. $Y+X$
- ד. XY

6. x ו- y הם משתנים מקריים בלתי תלויים. x מקבל את הערכים 5, 10 ו-15. y מקבל את הערכים

0, 10 ו-20. פונקציית ההסתברות של $x+y$ היא:

$x+y$	5	10	15	20	25	30	35
$P(x+y)$	0.03	0.05	0.08	0.1	0.25	0.35	0.14

חשב את פונקציית ההסתברות המשותפת של x ו- y .

7. יהיו X_1 ו- X_2 משתנים מקריים בלתי תלויים. כל אחד מהם מקבל את הערך 0 בהסתברות $1/4$ ואת הערך 1 בהסתברות $3/4$.

א. מצא את פונקציית ההסתברות של $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$

ב. חשב את $E(\bar{X})$, $V(\bar{X})$ תוך שימוש בפונקציית ההסתברות $\bar{X}$.

8. ההסתברות שקבוצה א' תנצח במשחק כלשהוא היא 0.5.

ההסתברות שקבוצה ב' תנצח במשחק כלשהוא היא 0.4.

ההסתברות לתיקו היא 0.1

הקבוצות משחקות שני משחקים.

נגדיר: x - מספר הניצחונות של קבוצה א'.

y - מספר הניצחונות של קבוצה ב'.

א. האם x ו- y בלתי תלויים? בלתי מתואמים?

ב. חשב $V(x+y)$, $V(x-y)$.

9. בארגז 5 כדורים מהם: 2 אדומים, 2 שחורים ו-1 לבן.

מוציאים 3 כדורים ללא החזרה.

יהי: x - מספר הכדורים האדומים.

y - מספר הכדורים השחורים.

חשב:

א. $E(x)$, $E(y)$, $V(x)$, $V(y)$, $\text{cov}(x,y)$

ב. מה ההסתברות לשני כדורים אדומים, אם ידוע שהוצא כדור אחד שחור?

10. מטילים קוביה פעמיים.

x - תוצאת ההטלה הראשונה.

y - הגדולה מבין תוצאות ההטלות.

האם x ו- y בלתי מתואמים?

חשב שונות משותפת של x ו- y , $V(x+y)$, $V(x-y)$.

11. על סמך נסיון העבר, ידוע, שמחצית הבוגרים בבתי הספר להנדסאים פונים לעבודה בתעשייה. נלקח מדגם של 4 בוגרים מהם 2 נשים.

x - מספר ההנדסאים במדגם (נשים וגברים), שפנו לעבודה בתעשייה.

y - מספר הנשים במדגם שפנו לעבוד בתעשייה.

א. מהי התוחלת והשונות של x .

ב. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של x ו- y .

ג. האם x ו- y תלויים?

ד. מצא $\text{cov}(x,y)$.

12. מכונה מסוימת בנויה משני חלקים: A ו-B. אורך החיים של כל חלק הוא משתנה בעל התפלגות כדלקמן:-

אורך החיים בשנים	1	2	3	4
P(A)	0.5	0.2	0.2	0.1
P(B)	0.6	0.2	0.1	0.1

אין תלות בין אורך החיים של החלקים A ו-B. המכונה מפסיקה לעבוד, כאשר שני החלקים מתקלקלים. מהי תוחלת אורך החיים של המכונה?

13. בקופסא נמצאים 3 כדורים אדומים, 2 כחולים ו-1 לבן.

אתה מוזמן להשתתף במשחק הבא:

בחר מתוך הקופסא 2 כדורים ללא החזרה בעיניים עצומות.

על כל כדור אדום שתוציא - לא תקבל דבר.

על כל כדור כחול שתוציא - תקבל 10 ש"ח.

על כל כדור לבן שתוציא - תקבל 20 ש"ח.

א. בנה את טבלת ההסתברות המשותפת של: x - התקבולים מן הכדור הראשון שהוצא.

y - התקבולים מהכדור השני שהוצא.

ב. מהי תוחלת התקבולים במשחק?

ג. האם התקבולים תלויים?

ד. חשב את מקדם המתאם בין x ו- y .

14. נתונה ההסתברות המשותפת של מס' תאונות הדרכים בארץ (x) ומס' המכוניות בארץ (y). כמו כן ידוע:

$$P(x = 500 | y = 50000) = \frac{1}{5}$$

$$P(x = 500 | y = 60000) = \frac{2}{3}$$

Y	50000	60000	70000
X			
400	0.2	0.1	0
500			0
600			
	0.25	0.45	

א. חשב את מקדם המתאם בין x ל- y.

ב. בחודש הבא מעריכים כי יהיו בארץ 60,000 מכוניות. כמה תאונות דרכים צפויות במצב כזה?

15. נתונה הסתברות משותפת:

Y	1	2	3
X			
4-		0.09	0.06
0	0.15	0.10	0.06
2	0.20		
	0.50		0.20

א. מצא $E(y/x=0)$

ב. מצא $cov(x,y)$

ג. ההתפלגות המשותפת של z, y זהה לזו של x, y.

מלבד העובדה ש z מקבל את הערכים 0, 12, 6- במקום 2, 0, 4- מהו $cov(z,y)$?

16. נתונה פונקציית ההסתברות של המ"מ X.

x	2-	1-	1	2
P(X=x)	1/4	1/4	1/4	1/4

נתון: $Y = X^2$

א. רשום את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו-Y.

ב. האם X ו-Y בלתי תלויים?

ג. חשב $cov(X,Y)$

ד. חשב את $P(X^2 = i | X = k)$ לכל i ולכל k.

התפלגות בדידות

תרגיל מס' 10

התפלגות בינומית :

1. מתוך 100 סטודנטים המתחילים את לימודיהם באוניברסיטה, מסיימים 30 את לימודי התואר הראשון לאחר 3 שנות לימוד. 10 סטודנטים מתחילים זה עתה את לימודיהם. חשב את ההסתברויות למספר המסיימים מביניהם כעבור 3 שנים, כדלקמן :
 - א. ההסתברות שאף אחד מהם לא יסיים.
 - ב. ההסתברות שלפחות אחד מהם יסיים.
 - ג. ההסתברות שכולם יסיימו.
 - ד. ההסתברות שיסיימו לכל היותר 8.
 - ה. ההסתברות שיסיימו יותר מ- 3.
 - ו. ההסתברות שמחצית הקבוצה תסיים.
 - ז. ההסתברות שאחד מהם יסיים.
 - ח. ההסתברות שבין 2 ל- 9 מהם יסיימו.
2. מטילים בבת אחת 4 מטבעות הוגנות, 4 פעמים בזו אחר זו.

מה ההסתברות להופעת 3 "עצים" 3 פעמים ?
3. במבחן אמריקאי 10 שאלות. לכל שאלה מוצעות 2 תשובות, כשעל התלמיד לקבוע איזו מהם נכונה.

מה ההסתברות שתלמיד שמנחש, יענה על כל השאלות, אם ידוע שענה נכון לפחות על 7 שאלות?
4. בחברת תעופה ידוע ש- 20% מהמטוסים מגיעים ליעדם באיחור. כמו כן, ידוע, כי מתוך המטוסים המאחרים 50% מאחרים ביותר משעה אחת. ביום שני יש לחברת תעופה 15 טיסות.
 - א. מה ההסתברות שביום זה אף מטוס לא יאחר ?
 - ב. מה ההסתברות שלפחות מטוס אחד יאחר ?
 - ג. מה ההסתברות ששני מטוסים יאחרו ?
 - ד. כמה מטוסים מאחרים בממוצע (ביום שני) ביותר משעה אחת ?
 - ה. מהי ההסתברות, שאף מטוס מהמטוסים לא יאחר באותו יום ביותר משעה אחת ?

5. דובר צה"ל הודיע, כי עד עתה חזרו הביתה 1/3 מאנשי המילואים המגויסים.
בקורס מסוים גויסו 30% מהסטודנטים. בוחרים באופן מקרי 10 סטודנטים מתוך רשימת המשתתפים בקורס.
- א. מה ההסתברות, שימצאו ביניהם יותר מ-7 שהיו מגויסים וכבר חזרו ?
 - ב. ידוע, שבמדגם יש יותר מ-5 מגויסים שחזרו. מה ההסתברות שיש בדיוק 6 ?
 - ג. מהי התוחלת, ומהי השונות של מספר המגויסים שחזרו במדגם זה ?
6. במפעל מסוים יש שתי סדרות ייצור גדולות לייצור אותו מוצר. תפוקת שתי הסדרות זהה. ידוע, כי בסדרה אחת יש 10% פגומים, ובסדרה השניה - 20%. המוצרים מכל סדרת ייצור נארזים בנפרד, כאשר בכל ארגז 5 מוצרים. אם לוקחים ארגז אחד באקראי, מה ההסתברות של המקרים הבאים:-
- א. כל המוצרים בארגז תקינים.
 - ב. מוצר אחד פגום.
 - ג. לפחות מוצר אחד בארגז הנבחר הוא פגום.
 - ד. ארגז אחד נבדק, נמצא בו פגום אחד. מה ההסתברות, שהמוצרים הם מהסדרה הראשונה?
7. סטודנט חישב ומצא שאם הוא לוקח 4 קורסים, ההסתברות שלו לעבור כל אחד מהם היא 0.8. אם הוא לוקח 5 קורסים, ההסתברות שלו לעבור כל אחד מהם היא 0.7, ואם הוא לוקח 6 קורסים ההסתברות לעבור כל אחד מהם היא 0.5. בסוף השנה חייב הסטודנט לעבור לפחות 4 קורסים על מנת לעמוד בדרישות. כמה קורסים עליו לקחת כדי להבטיח את ההסתברות הגבוהה ביותר להצלחה?
- הנח, כי הצלחתו או אי הצלחתו בקורס אחד בלתי תלוי בהצלחתו או אי הצלחתו בקורס אחר.

התפלגות היפרגאומטרית וגיאומטרית :

8. במפעל עובדים 30 טכנאים ו-10 הנדסאים, מה ההסתברות ששלושת האנשים שיישארו אחרונים במפעל ביום מסוים יהיו :
- א. כולם טכנאים.
 - ב. לפחות מהנדס אחד.
 - ג. לכל היותר מהנדס אחד.
 - ד. שני מהנדסים וטכנאי אחד.
9. בארגז 15 נורות רגילות, 10 אדומות ו-5 ירוקות. 5 נורות נבחרות באקראי.
- מה ההסתברות לתוצאות אלו :
- א. 3 נורות רגילות, אחת אדומה ואחת ירוקה ?

- ב. לא יהיו נורות רגילות ?
- ג. לא יהיו נורות ירוקות ?
- ד. לפחות נורה אחת מכל צבע ?
- ה. לכל היותר 3 נורות רגילות ?
- ו. כל הנורות ירוקות ?
10. אדם שיכור חוזר לביתו, ובידו צרור של 10 מפתחות, שרק אחד מהם פותח את הדלת. הוא מנסה לפתוח פעם אחר פעם, ומחזיר את המפתח לצרור לאחר כל ניסיון.
- א. מה ההסתברות, שהדלת תפתח בניסוי השלישי ?
- ב. ידוע, שהוא כבר ניסה 3 פעמים. מה ההסתברות שהדלת תפתח בניסוי החמישי ?
- ג. מה התוחלת והשונות של מספר הניסיונות עד ההצלחה ?
11. זורקים קוביה עד לקבלת הסיפרה 6, אך לא יותר מ- 10 פעמים. חשב הסתברויות אלה :
- א. הסיפרה 6 התקבלה בזריקה השביעית ?
- ב. הסיפרה 6 לא התקבלה באף זריקה ?
12. משפחה א' החליטה לקנות כרטיסים להגרלה מדי שבוע עד הזכייה הראשונה. משפחה ב' החליטה לקנות כרטיסים מאותה הגרלה כל שבוע במשך 12 שבועות. ההסתברות לזכייה בהגרלה היא 0.1.
- X - מס' השבועות שמשפחה א' תקנה כרטיסים עד הזכייה.
- Y - מס' הזכיות שמשפחה ב' תזכה בהגרלה.
- א. חשב את פונקציות ההסתברות של X ואת פונקציית ההסתברות של Y.
- ב. מה ההסתברות שמשפחה א' תשתתף בהגרלה 10 שבועות ?
- ג. מה ההסתברות שמשפחה א' תשתתף בהגרלה ביותר מ- 4 שבועות ?
- ד. מה ההסתברות שמשפחה ב' תזכה ב- 5 הגרלות ?
- ה. מה ההסתברות שמשפחה ב' תזכה בלא יותר מ- 2 הגרלות ?
- התפלגות פואסונית**
13. מספר התאונות, שקורות לאדם במשך שנה, מתפלג פואסון עם ממוצע של 2 תאונות.
- מה ההסתברות שלשני אנשים, שנבחרו באקראי, היתה תאונה אחת לכל אחד, אם ידוע שלשניהם ביחד היו פחות משלוש תאונות בשנה שחלפה ?

14. במפעל מסוים שני קווי טלפון, האחד למנהל והשני לסגנו. ידוע, שמספר השיחות המתקבלות בכל קו מתפלג פואסונית, עם ממוצע של שיחה אחת לשעה למנהל ו-3 שיחות לשעה לסגן.
- א. מהי ההסתברות, שתגיע שיחת טלפון אחת למפעל במשך שעה ?
- ב. אם ידוע, שהגיע למפעל שיחת טלפון אחת, מה ההסתברות שהופנתה לחדר של המנהל ?
15. ספרן בספריה משרת בממוצע 10 לקוחות בשעה. הוא עוזב את עבודתו ל $1/4$ שעה.
- א. לכמה לקוחות בממוצע יש לצפות בזמן העדרו ?
- ב. מה ההסתברות, שאף קורא לא יזדקק לספרן בזמן העדרו ?
- ג. מה ההסתברות שלפחות 3 לקוחות, לא ימצאו את הספרן במקומו ?
- ד. מה ההסתברות שלכל היותר 3 לקוחות, לא ימצאו את הספרן במקומו ?
16. לסניף בנק מגיעים בממוצע 180 איש בשעה. מה הסיכוי שבמשך דקה מסוימת :
- א. יגיעו בדיוק 3 אנשים ?
- ב. יגיעו 4 אנשים לפחות ?
- ג. לא יגיע אף לקוח ?
- ד. יגיעו בדיוק 4 אנשים ?
17. במפעל מסוים שתי מכונות, המייצרות מוצר זהה בכמויות גדולות. ידוע, שמספר המוצרים הפגומים ליום מתפלג פואסונית עם ממוצע של פגום אחד ביום במכונה A ו-4 פגומים ביום במכונה B.
- א. מה ההסתברות, שביום מסוים סה"כ מספר המוצרים הפגומים, שיוצרו במפעל יהיה 3 ?
- ב. ביום מסוים, בשל מחסור בעובדים, החליטו להפעיל רק מכונה אחת, ובחרו באופן מקרי בין מכונה A ל-B. מה ההסתברות ל-2 מוצרים פגומים ביום זה ?
- ג. בתנאי סעיף ב', ידוע, כי ביום זה היו 2 מוצרים פגומים. מה ההסתברות שמכונה A היא שעבדה באותו יום ?
18. בחברה המייצרת מספר גדול של פריטים, מעריכים כי ההסתברות, שפריט מסוים יהיה פגום היא של $1/50$. במקום לבדוק כל פריט ופריט, העדיפו היצרנים לשווק את המוצרים ללא בדיקה, ולהציע לקונים להחליף כל ארגז הכולל יותר מ-5 פריטים פגומים, וכמו-כן לפצותם על הנזק והטרחה הנובעים מהתקלה. כל ארגז כולל 100 פריטים.
- א. חשב את ההסתברות, שהארגז יכיל 6 או יותר פריטים פגומים.
- ב. חשב את התוחלת ושונות מספר הפריטים הפגומים בארגז.

פרדוקס האסיר.

אחד משלושת האסירים ראובן, שמעון ולוי עומד להיות מוצא להורג, להלן E , למחרת היום, ואילו השניים האחרים יצאו לחופשי.

בהעדר כל מידע אחד, ההסתברות של כל אחד מהם להיות מוצא להורג היא $1/3$.

ראובן, המתחכם מבין שלושה, החליט לנסות לחקור את הסוהר, שבא בסוד ההחלטה, אולם נאסר עליו לגלות את פסק הדין.

ואלה דברי ראובן :

"אני יודע, בלאו הכי, כי לפחות אחד משני חברי עומד לצאת מחר לחופשי. נקוב עבורי, אפוא, בשם של אחד מן השניים, אשר יצא מחר לחופשי. לא תפר בכך את האיסור שהוטל עליך, וגם לא תמסור לי כל אינפורמציה חדשה לגבי הגורל שלי."

הסוהר טוב הלב השתכנע בנכונות הטענה, ונקב בשמו של שמעון. אולם עתה נותרו ראובן ולוי בלבד מועמדים להוצאה להורג, ונראה, כי הערך של $P(E)$ עבור ראובן עלה מ $1/3$ ל- $1/2$. האומנם ?

נניח שהסוהר היה מציין את שמו של לוי, במקום של שמעון. מה היה אז הערך של $P(E)$ של ראובן? ואולי בעצם היה ראובן מיטיב לעשות, אילו לא שאל כלל ? האם יתכן שהגדיל את ההסתברות של אסון לעצמו על ידי עצם השאלה (מה שלא תהיה התשובה עליה) ? האם תוכל להוציא אותנו מסבך זה ?