תוכנית הקורסים מתמטיקה לכלכלנים א' ו-ב'

תכנית הקורס: מתמטיקה לכלכלנים א'

1. קבוצות: הגדרה, שייכות, הכלה, קבוצה ריקה, איחוד, חיתוך, משלים, דיאגרמות וין, משפטי דה- מורגן.
2. קבוצות של מספרים: טבעיים, שלמים, רציונלים, ממשיים, קבוצה חסומה, אינטרולים.
3. מושג הפונקציה: תחום הגדרה, טווח, פונקציה חד-חד-ערכית, פונקציה הפוכה, פונקציה מורכבת.
4. פונקציות ממשיות: תיאור גרפי, פונקציה חסומה, פונקציה מונוטונית, פולינום, פונקציה רציונלית, פונקציות הערך המוחלט והערך השלם, סדרה, פונקציה זוגית ואי זוגית.
5. פונקציות ליניאריות: פונקציה קבועה, פונקצית הזהות, פונקציה ליניארית כללית, משואה כללית של ישר, משואת ישר באמצעות שתי נקודות ובאמצעות נקודה ושיפוע.
6. פונקציות ממעלה שניה: תיאור גרפי ותכונות.
7. הפונקציה המעריכית והפונקציה הלוגרתמית.
8. גבולות ורציפות: הגדרת המושגים, רציפות הפונקציות האלמנטריות, סוגי אי רציפות, רציפות חד צדדית וגבול חד צדדי, חישובי גבולות - כללים אלמנטרים.
9. מושג הנגזרת ומשמעותה האלמנטרית (עליה וירידה, העברת המשיק). כללים אלמנטריים לחישובי נגזרות (סכום מכפלה, מנה). נגזרות של פולינומים ושל פונקציות רציונליות. נגזרת של פונקציה מורכבת ושל פונקציה הפוכה.
10. כללים אלמנטרים לחישובי גבולות בפונקציות מעריכיות.
11. הגדרת המספר e. נגזרת של הפונקציה הלוגריתימית. לוגריתימים טבעיים, נגזרות של פונקציות מעריכיות, גזירה לוגריתמית.
12. נגזרת מסדר שני ומעלה.

תכנית הקורס: מתמטיקה לכלכלנים ב'

1. כללי לופיטל לחישובי גבולות.
2. חקירה כללית של פונקציה: עליה וירידה, מינימום ומקסימום, קעירות וקמירות, נקודות פיתול, אסימפטוטות, ישומים כלכלים.
3. מושג הדיפרנציאל ושימושו לחישובים מקורבים.
4. האינטגראל הבלתי מסוים, אינטגרלים מיידיים. האינטגראל המסוים וחישובי שטחים. שיטות שונות לחישוב אינטגרלים: הצבה, אינטגרציה בחלקים, אינטגרציה של פונקציה רציונלית.
5. פונקציות רבות משתנים: הגדרה, נגזרות חלקיות מסדר ראשון ושני, כלל השרשרת, פונקציות הומוגניות ותכונותיהן, הדיפרנציאל השלם, פונקציה סתומה וגזירתה, הדיפרנציאל השני. מינימום ומקסימום בפונקציות ללא מגבלה ובפונקציות בתנאי מגבלה (כופלי לגרנז' - תנאים הכרחיים בלבד), שימושים כלכליים.

ספרים מומלצים

1. יונתן סטוף, מתמטיקה א' לכלכנים.
2. פרנק אירס, חשבון איניפיניטסמלי.
3. האוניברסיטה הפתוחה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגלי למדעים.
4. R.G.D. Allen, "Mathematical Analysis for Economists"

תוכן העניינים

תרגיל 1 - קבוצות ומספרים

1. נתונות קבוצות אלו:

N = קבוצת המספרים הטבעיים;

Z = קבוצת המספרים השלמים;

$$A = \{2n \mid n \in N\}$$
$$B = \{2n+1 \mid n \in N\}$$

מצא את: $A \cup N$; $A \cup Z$; $A \cap Z$; $A \cap B$; $A - B$; $B - A$.

2. נתונות הקבוצות הבאות:

N = קבוצת המספרים הטבעיים;

Z = קבוצת המספרים השלמים;

Q = קבוצת המספרים הרציונליים;

R = קבוצת המספרים הממשיים;

R_+ = קבוצת המספרים הממשיים שאינם שליליים $\{x \mid x \geq 0\}$;

R_{++} = קבוצת המספרים הממשיים החיוביים $\{x \mid x > 0\}$;

בכל אחד מן המקרים הבאים קבע אם המשפט נכון או לא נכון.

א. $\{0\} \subset A$ לכל קבוצה A.

ב. $\phi \subset A$ לכל קבוצה A.

ג. $R_{++} \cup \{0\} = R_+$

ד. $R_{++} \cup \{0\} = R_{++}$

ה. $R_{++} \subset R_+ \subset R$

ו. $N \subset Z \subset Q \subset R_+ \subset R$

ז. $\{$פתרונות המשוואה $x^2 - 5x + 6 = 0\} \subset R_+ \cap Z$

3. תהיינה A, B ו C קבוצות כלשהן. קבע והסבר אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות (רצוי להיעזר בדיאגרמות ויין):

א. $(A \cup B) \cap \overline{C} = A \cup (B \cap \overline{C})$

ב. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ג. $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$

ד. $A \cap \overline{B} \cap C \subseteq A \cup B$

ה. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ו. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ז. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ח. $A - B = \overline{B} - \overline{A}$

4. קבע והסבר אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות:

א. $\{x\}\subseteq\{x,\{x\}\}$

ב. $\{\{x,\{x\}\in\{x\}$

ג. $\{\{x,\{x\}\subseteq x$

ד. $\{\{x,\{x\}\in x$

5. תהיינה A, B ו C קבוצות. הוכח ש $A\subseteq B\subseteq C$ אם ורק אם $A\cup B=B\cap C$.

6. הוכח כי סכום של מספרים רציונליים נותן מספר רציונלי.
מה תוכל לומר לגבי סכום מספרים אי רציונליים?
ומה כאשר אחד המחוברים רציולני והשני אי רציונלי?
מה בנוגע למכפלה בכל אחד משלושת המקרים?

7. קבע עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, האם היא חסומה מלעיל או/ו מלרע.

א. $\left\{x \middle|\ x=\frac{1}{n},\quad n\in N\right\}$

ב. $\left\{x \middle|\ x<3\right\}$

ג. $\left\{x \middle|\ x=3^n,\quad n\in N\right\}$

ד. $\left\{2^{18},\quad 3^{-2},\quad 0,\quad 5,\quad 10^{30}\right\}$

ה. $[-3,\ \ 1)\cup(1,\ \ 2]$

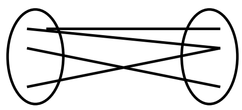
תרגיל 2 - פונקציות - מושגים בסיסיים

1. תהי A קבוצת כל המילים העבריות. נתאים לכל אלמנט ב A מספר השווה לגימטריה שלו. קבע האם זוהי פונקציה, והאם הינה חד - חד - ערכית.

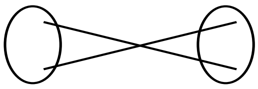
2. הפונקציה $f: [0, 20] \rightarrow R$ מקיימת $f(p) = 10{,}000 - 500p$.
פונקציה זו מתארת את ס"כ כמות התפוחים (בקג') אותה רוצים לקנות הצרכנים במשק כשהמחיר התפוחים הוא p ש"ח לקג'.
   א. רשום את הכמות המבוקשת כשמחיר p לשווה ל- 10.
   ב. נסמן $Q=f(p)$. חשב את המחיר שמתאים כשהכמות המבוקשת היא $Q=2000$.
   ג. מהו טווח הפונקציה.
   ד. האם הפונקציה חד - חד - ערכית.
   ה. מצא f^{-1}.
   ו. מהי הפונקציה $f(f^{-1})$ ו- $f^{-1}(f)$.

3. א. עיין באיורים הבאים, וקבע באלו מהם מוגדרת פונקציה מ A ל B.

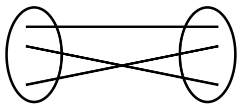
1. A B

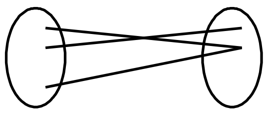


2. A B



3. A B





   ב. אלו מהפונקציות שקבלת בסעיף א' יש להם פונקציה הפוכה.

4. אלו מהמשוואות דלקמן מגדירות את Y כפונקציה של x.
   א. $\sqrt{Y+1} = x-5$
   ב. $(Y+1)^4 = x^3 - 2$

5. קבע את תחום ההגדרה בכל אחת מהפונקציות הבאות:
   א. $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$
   ב. $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$
   ג. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 3x - 5}$
   ד. $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$
   ה. $y = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 2}$
   ו. $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x-4| - 3}}$
   ז. $y = \sqrt{-x^2 - 2}$

6. לאלו מהפונקציות הבאות יש פונקציה הפוכה? אם קיימת, מצא אותה:

א. $y = 3x - 9$

ב. $y = \frac{5}{x - 10}$

ג. $y = x^2 + 1$

ד. $y = \frac{5}{(2x-1)^3}$

ה. $y = (x-1)^4 + 3$

ו. $y = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1}$

7. יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות חד חד ערכיות.

א. הוכח ש f^{-1} גם היא חד חד ערכית.

ב. הוכח, שאם הפונקציה $g[f(x)]$ מוגדרת גם היא חד חד ערכית.

ג. השתמש בטענות הסעיפים הקודמים, וקבע, האם הפונקציה הבאה חד חד ערכית:

$$f(x) = \sqrt{3x+4}$$

8. חשב את התחום והטווח של פונקציות א' וב' המופיעות בשאלה 6; כמו כן, חשב את הפונקציה המתקבלת מהרכבת א' על ב' ואת זו המתקבלת מהרכבת ב' על א'.

9. נתונות הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$$

$$g(x) = \frac{1}{4x+1}$$

$$h(x) = x + 1$$

$$t(x) = \frac{1}{x}$$

הוכח שקיים: $f[h(x)] = g[t(x)] + 1$ לכל x השונה מאפס.

10. נתונות פונקציות אלו:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 2 \\ 3x & x \geq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. על כל אחת משתי הפונקציות קבע אם היא מונוטונית, אם היא חד-חד ערכית, ומצא את הפונקציה ההפוכה לה אם היא קיימת.

ב. חשב את $f(f(x)),\ g(f(x)),\ f(g(x))$.

11. חשב את התחום והטווח של הפונקציה $y=|3x-6|$ וקבע אם היא חד-חד ערכית.

12. בדוק/י האם הפונקציה זוגית/ אי זוגית/ לא זה ולא זה:

א. $f(x)=x^2$

ב. $f(x)=\frac{1}{2}(a^{2x}+a^{-2x})$

ג. $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+x}+x\cdot 10^{-x^2}$

תרגיל 3 - פונקציות מיוחדות

פונקציות לינאריות ומשוואת הישר

1. א. מהי משפחת כל הפונקציות הלינאריות המקיימות $f(4) = -3$?
   ב. איזו מבין הפונקציות שקבלת בחלק א' מקיימת $f(2) = 7$?
   ג. איזו מהן היא בעלת שיפוע 3/4 ?

2. מצא את משוואת הישר המקביל לישר $x+2y = 32$ ויוצר עם הצירים משולש ששטחו 1.

3. מצא את משוואות הישרים המכילים את צלעות המשולש שקודקודיו הם:
   $(2, -1)$, $(0, 3)$, $(-4, 5)$.

4. נתונה משפחת הישרים $(k^2-36)x+(k^2-15k+36)y+(k-1)^2=0$ כש k פרמטר.
   מצא לאילו ערכים של k הישר הינו:
   א. מקביל לציר ה x - ים.
   ב. עובר דרך הראשית.
   ג. חוצה את הזוית שבין הצירים.
   ד. מקביל לישר $2y + 5x = 3$.

פונקציות ממעלה שניה

5. נתונות הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$g(x) = -2x^2 + 13x - 15$$

   א. קבע את התחום והטווח של f ו- g.
   ב. חשב את השורשים של f וכן של $f - g$.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = (m-4)x^2 + 10x + m$
   מה צריך להיות ערכו של m על מנת שטווח הפונקציה יכלול רק מספרים הקטנים מ - 4?

7. נתונה המשוואה $x^2 - mx + m + 3 = 0$.
   מה צריך להיות m כדי שלמשוואה יהיו 2 פתרונות, האחד קטן מ 3 והשני גדול מ 3?

8. לאילו ערכי m הביטוי $(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x + 2$ יהיה חיובי לכל x ?

9. פונקצית הוצאות היצור עבור כמות מיוצרת Q במפעל מסויים, תלויה במספר המכונות בהן משתמש המפעל. אם ישתמש ב- 5 מכונות, פונקציית העלות הכוללת תהיה: $TC_1(Q) = 2Q^2 + 8Q + 10$
   אך אם ישתמש ב- 15 מכונות, פונקציית העלות הכוללת תהיה: $TC_2(Q) = Q^2 + 4Q + 231$

עבור כל כמות תוצר נתונה Q, יבחר היצרן במספר המכונות (5 או 15), שיבטיח לו את עלות הייצור הנמוכה יותר. עבור אלו כמויות תוצר ישתמש המפעל ב- 5 מכונות, ועבור אלו כמויות תוצר ישתמש המפעל ב- 15 מכונות?

10. נתון המשחק הבא :

צריך לבחור מספר x $0 \le x \le 3$ ואז מקבלים כתשלום את הנמוך מבין הערכים $2x+3$, x^2-x+5.

א. מצא את הפונקציה שמתארת את התשלום שיקבל כפונקציה של המספר x שבחר.

ב. איזה x כדאי לו לבחור, על מנת שיקבל ערך מקסימלי.

סדרות

11. נתונה הסדרה $a_n = \frac{n-1}{3n+5}$ קבע אם הסדרה מונוטונית ואם היא חסומה.

12. נתונה הסדרה

$$a_n = \begin{cases} \frac{2n}{n+3} & \text{n זוגי} \\ 2 & \text{n אי זוגי} \end{cases}$$

רשום את חמש אברי הסדרה הראשונים. קבע אם היא מונוטונית, חסומה, חד חד ערכית.

13. נתונה הסדרה ... 1, 1.1, 1.11, 1.111

א. רשום בצורה כללית את איבר הסדרה כפונקציה של n.

ב. קבע האם הסידרה מונוטונית והאם היא חסומה.

14. נתונה הסדרה $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

א. רשום את 5 האיברים הראשונים של הסדרה.

ב. קבע אם הסדרה מונוטונית והאם היא חסומה. אם קיימים חסמים, מצא חסם מלעיל וחסם מלרע.

15. נתונה פונקציה f $\quad f:N \to R \quad f(n) = \frac{4-2n}{3n+2}$

א. האם הפונקציה הנתונה היא פונקציית על.

ב. האם הפונקציה היא חד חד ערכית.

ג. האם הפונקציה מונוטונית, אם כן האם היא מונוטונית עולה או יורדת.

ד. האם הפונקציה חסומה? אם כן, מצא חסמים.

תרגיל 4 - גבולות ורציפות

1. חשב גבולות אלו:

א. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 4$

ב. $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 - x^2 + x - 5$

ג. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + x^2 + x - 5$

ד. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^4 + 2x^3 + x - 1$

ה. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

ו. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{4x - 5}$

ז. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2}$

ח. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 5}{-(x^2 - 1)^2}$

ט. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x^2 - 1)^2}{-x^3 - x^2 + x - 5}$

י. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

יא. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$

יב. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

יג. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{1 - x^2}$

יד. $\lim_{n \to \infty} a_n$, $a_n = \begin{cases} \frac{2n}{n+3} & \text{זוגי } n \\ 2 & \text{אי זוגי } n \end{cases}$

טו. $\lim_{n \to \infty} a_n$, $a_n = \begin{cases} \frac{3n}{n+3} & \text{זוגי } n \\ 2 & \text{אי זוגי } n \end{cases}$

טז. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

יז. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

יח. $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2+6}-x)$

יט. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2. מצא את נקודות אי הרציפות של כל אחת מהפונקציות הבאות, וקבע לאיזה סוג של אי-רציפות שייכת כל נקודה כזו:

$$f(x)=\left|x-2\right|$$

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 1 \\ x & 0<x<1 \\ 5 & x\le 0 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\left\{(1+x)^2-1\right\} & x\ne 0 \\ 3 & x=0 \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{6}{x^2+2x-8}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+3} & x<-1 \\ \frac{x^2+|x|}{|x|} & x>-1 \end{cases}$$

$$f(x)=\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+4} & x<1 \\ -1 & x=1 \\ \frac{x^2-9x+14}{x^2+3x-10} & x>1 \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{|x+2|}{x^2-4}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\le 0 \\ \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}-2} & x>0 \end{cases}$$

תרגיל 5 - הנגזרת

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $x^4 - 3x^2 - 6$

ב. $\frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b} - x$

ג. $(1+4x^3)(1+2x^2)$

ד. $\frac{2x^4}{b^2 - x^2}$

ה. $(x^2 - \frac{1}{x})^3$

ו. $(5x-1)^4(2-3x)^5$

ז. $(\frac{2x-1}{x+2})^3$

2. נתונה הפונקציה $f(x) = |x|$. קבע מהי פונקצית הנגזרת שלה, ומה תוכל לומר על נגזרת הפונקציה בנקודה $x = 0$.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (כלומר - הערך השלם של x). קבע מהי פונקציית הנגזרת שלה.

4. גזור את הפונקציה $y = \sqrt{1+2x}$ בשלוש דרכים:
   א. לפי הגדרת הנגזרת.
   ב. באמצעות הפונקציה ההפוכה שלה.
   ג. כפונקציה מורכבת.

5. חשב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $\frac{x+3}{1-x}$ בנקודה $x = -1$.

6. מצא משיקים לפונקציה $y = x^3 + x - 2$ המקבילים לישר $y = 4x + 3$.

7. מצא משיק לפונקציה $y = x^2 - 2x + 5$ המקביל לקטע שבין הנקודות (3, 8) ו (1, 4).

8. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (5, 0) ומשיק לגרף הפונקציה $y = x^2 - 6x + 9$ (שים לב לכך שהנקודה הנתונה אינה נמצאת על גרף הפונקציה).

9. פונקצית העלות הכוללת של פירמה נתונה ע״י $TC(q) = q^2 + 27q + 16$

א. מצא את פונקצית העלות הממוצעת AC.

ב. מצא את פונקצית העלות השולית MC.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

10. פונקצית העלות הכוללת נתונה ע״י $a>0$, $TC(q) = aq^2 + bq$ הראה שלכל q בתחום ההגדרה (כלומר לכל $q>0$) $MC>AC$.

תרגיל 6 - גבולות ונגזרות בפונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

1. חשב גבולות אלו:

א. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

ב. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

ג. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

ד. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

ה. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{2}{x})^x$

ו. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \dfrac{1}{x})^x$

ז. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{x})^{x+5}$

ח. $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$

ב. $\dfrac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{b}{x \cdot \sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

ג. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

ד. e^{ax}

ה. e^{4x+5}

ו. 7^{x^2+2x}

ז. $a \cdot e^{\sqrt{x}}$

ח. $e^{\ln x}$

ט. $x^{\frac{1}{x}}$

י. $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

יא. $\ln(x^2+x-1)^3$

יב. $\ln\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}$

יג. $\log_5 \sqrt[3]{x}$

יד. $x^{\ln x}$

טו. $\frac{(x-2)^2\sqrt{x^2-5}}{\sqrt[3]{(x-1)^4(3x-2)}}$

3. מצא לכל n טבעי את הנגזרת מסדר n של פונקציות אלו (הוכח במדויק את תשובותיך):

א. $\frac{1}{x^2}$

ב. $\frac{1}{3x+2}$

ג. $\ln x$

ד. e^{ax}

תרגיל 7 - גבולות - כלל לופיטל

1. חשב את הגבולות הבאים (הסבר את תשובותיך):

א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^{\alpha}-1}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$

ג. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

ד. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

ה. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$

ו. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

ז. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$

ח. $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)$

ט. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$

י. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^{2x}$

יא. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot(\ln x)^3$

יב. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{e^{-x}}$

יג. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+3x)^{\frac{1}{x}}$

2. מהם ערכי a ו-b כך שהפונקציה $f(x)$ תהיה רציפה בכל נקודה.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\cdot\ln(1+x)}{x} & x<0 \\ 2+b & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-1} & x>1 \end{cases}$$

תרגיל 8 - מקסימום ומינימום וסקירת פונקציה

1. חקור ושרטט פונקציות אלו:

א. $\frac{\ln x}{x}$

ב. $2x^3-5x^2-4x$

ג. $x\cdot e^{-x}$

ד. $\frac{1}{e^x-1}$

ה. $\frac{x^3}{x^2-12}$

2. נגדיר פונקצית עלות כוללת TC, שהיא ס"כ העלות ליצור q מוצרים.

עלות קבועה $TFC = TC(0)$

עלות משתנה $TVC = TC(q)-TC(0)$

עלות כוללת ממוצעת $ATC=\frac{TC(q)}{q}$

עלות קבועה ממוצעת $AFC=\frac{TFC(q)}{q}$

עלות משתנה ממוצעת $AVC=\frac{TVC(q)}{q}$

עלות שולית $MC = TC'$

נתונה פונקצית העלות הכוללת $TC(q)=q^3-3q^2+10q+5$

א. מצא את הפונקציות: MC ,AVC , AFC , TVC ,TFC.

ב. מצא את תחומי העליה והירידה של הפונקציות שקבלת בסעיף א'.

3. הוכח:

א. שאם $f(x)$ ו-$g(x)$ פונקציות עולות (ממש) אזי גם $f+g$ עולה ממש.

ב. הוכח שאם f עולה ממש ו- g יורדת (ממש) אזי הפונקציה $f-g$ עולה ממש.

4. תן דוגמא לשתי פונקציות f ו g יורדות ממש, ואשר $f\bullet g$ עולה ממש.

5. הוכח שאם f ו g עולות (ממש) אזי גם הפונקציה המורכבת $g[f(x)]$ עולה (ממש).

6. התכונות שמקיימות עקומת תמורה $y=f(x)$ כאשר x הכמות המיוצרת של אחד המוצרים ו y הכמות המיוצרת של המוצר השני הם:

א. $f(x)\ge 0$

ב. $f'(x)\le 0$

ג. $f''(x)\le 0$

ד. אילו מבין הפונקציות הבאות יכולות לתאר עקומת תמורה :

(1) $f(x) = 25 - x^2 \qquad 0 \le x \le 5$

(2) $f(x) = \sqrt{25 - x^2} \qquad 0 \le x \le 5$

(3) $f(x) = \frac{x-1}{x} \qquad 1 \le x \le 10$

(ד) $f(x) = \frac{100}{x} \qquad 0 \le x \le 100$

7. א. הוכח שסכום שתי פונקציות קמורות היא פונקציה קמורה.
ב. הוכח שסכום שתי פונקציות קעורות היא פונקציה קעורה.

8. הגמישות של פונקציה f(x) בכל נקודה x תסומן $\eta(x)$. ומוגדרת כ $\frac{xf'(x)}{f(x)}$. משמעותה הוא היחס בין השינוי היחסי ב f(x), לשינוי היחסי ב x.
(גמישות המחיר מוגדרת כ $\eta = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta P / P}$)

בשוק 100 פרטים, שפונקצית הביקוש של כל אחד מהם $q = 4 - 0.2p$:D(p).
א. מצא את גמישות הביקוש של כל פרט במחיר P = 3.
ב. מצא את גמישות הביקוש של כל פרט במחיר P = 10.
ג. מצא את פונקצית הביקוש של השוק כולו.
ד. מצא את גמישות הביקוש של השוק במחיר P = 3.

9. נסמן את η_f , η_g , η_h כגמישויות של הפונקציות f, g ו h.
בטא את η_h באמצעות η_f ו η_g עבור המקרים הבאים :
א. $h(x) = c \bullet f(x)$ c קבוע
ב. $h(x) = g(x) \bullet f(x)$
ג. $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

10. פונקצית הביקוש לתנורי חימום היא : $q = 42-3p$
א. מצא את הכמות q שעבורה יהיה ליצרן פדיון מקסימלי.
ב. מהו הרווח המקסימלי של היצרן אם פונקצית ההוצאות שלו היא $c = 2q^2$?

11. הוכח שפונקצית הביקוש $p = \frac{a}{q+b} - c$ (כאשר a, b ו-c קבועים וחיוביים) היא יורדת וקמורה. האם פונקצית הפדיון השולי MR היא בעלת אותן תכונות?

12. יצרן מקלטי רדיו מוכר x מקלטים לשבוע במחיר של p המקלט. פונקצית הביקוש לשבוע היא : $x = 75 - \frac{3}{5}p$. מחיר הייצור של x מקלטים הוא : $500 + 15x + \frac{1}{6}x^2$.

א. מהי הכמות האופטימלית של מקלטים שכדאי ליצרן למכור בשבוע?
ב. הנח כי הממשלה מטילה מס בגובה t על כל מכשיר שהיצרן מוכר. היצרן מצרף אל המס להוצאות הייצור. מה תהיה עתה הכמות האופטימלית? מה צריך להיות ערכו של t על מנת שהכנסת הממשלה תהיה מקסימלית.

13. מחיר הייצור הכולל של x מקלטי רדיו ליום הוא $0.25x^2+35x+25$, ומחיר מקלט רדיו אחד לכשימכר הוא $50-0.5x$.
א. מה צריך להיות היקף הייצור היומי לקבלת רווח כולל מקסימלי?

ב. הראה כי בנקודת האופטימום מחיר הייצור של מקלט אחד הוא מינימלי. האם זהו כלל הנכון תמיד?

תרגיל 9 - דיפרנציאל ואינטגרל

1. השתמש בדיפרנציאל כדי להעריך את 52^2 אם ידוע לך כי $50^2=2500$.
בדוק מהי הסטיה מהערך המדויק של 52^2 .

2. הערך בעזרת דיפרנציאל את $\sqrt{15}$ ואת 3.001^3 .

3. חשב אינטגרלים אלו :

א. $\int x^5 dx$

ב. $\int (x+\sqrt{x})dx$

ג. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$

ד. $\int \frac{x^8+3x^6+5x^5-2}{x^4}dx$

4. חשב בעזרת אינטגרל מסוים את השטח המוגבל על ידי הישר $y = 2x+1$, ציר ה-x, ציר ה-y והישר $x=2$.

5. חשב את השטח המוגבל על ידי : $y = 3x^2$, ציר ה-y והישר $y=3$.

6. בנקודת הפגישה של הקו העקום $y = 2x^3 + 3x^2 + 4$ עם ציר ה-y מעבירים משיק לקו זה. חשב את השטח הכלוא בין המשיק והקו העקום.

7. דרך הנקודה (5,0) עוברים משיקים לקו העקום $y = x^2 - 6x + 9$ (ראה שאלה ---). חשב את השטח הכלוא בין המשיקים והפרבולה.

8. חשב את האינטגרל $\int_{-1}^{1} x^3 dx$. מהי המשמעות הגיאומטרית של תשובתך?
מהו השטח הכלוא בין עקומת $y = x^3$ וציר ה-x בקטע [-1,1] ?

9. כמה לדעתך שווה האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$? הסבר את תשובתך.

כנ"ל לגבי : $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

10. חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int e^{5x}dx$

ב. $\int \frac{dx}{3x-7}$

ג. $\int \frac{dx}{1-x}$

ד. $\int (x^2+1)\cdot xdx$

ה. $\int \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2dx}{\sqrt{x}}$

ו. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

ז. $\int \sqrt{x^2+1}\cdot xdx$

ח. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$

ט. $\int x^2\sqrt{1+x}dx$

י. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx}}$

יא. $\int (3x^2+2x)e^{5x}dx$

יב. $\int x^{\alpha}\cdot \ln xdx$

יג. $\int \ln(5x+1)dx$

יד. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{3xdx}{x^2+1}$

טו. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

טז. $\int_4^8 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-15}}$

יז. $\int \frac{2x^2+5}{x+2}$

יח. $\int \frac{6x+4}{2x+5}$

יט. $\int \frac{(5x+9)dx}{x^2+3x+2}$

כ. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

*11. נתונות פונקציית הביקוש $p=\frac{1}{4}(9-q)^2 \quad D(q);$

ופונקצית ההצע $p=\frac{1}{4}(1-3q) \quad S(q);$

א. חשב את עודף הצרכן בנקודות שווי המשקל.

ב. מוטל מס קניה בשיעור של 3 ש״ח ליחידה. את המס משלם היצרן, חשב את עודף הצרכן בנקודות שווי המשקל, והראה כי הוא נמוך מאשר עודף הצרכן לפני הטלת המס.

תרגיל 10 - פונקציות רבות משתנים: מושגי יסוד וגבולות

1. בכל אחת מהפונקציות הבאות קבע מהו תחום הגדרתה והצג אותו גרפית:

א. $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

ב. $f(x,y)=\ln(x+y)$

ג. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x+y-1}{x^2+y^2-1}}$

ד. $f(x,y)=\sqrt{x\cdot y-x^3+x}$

2. בכל אחת מהפונקציות הבאות שרטט את העקומות שוות הערך עבור הערכים השלמים מ- -3 עד +3:

א. $f(x,y)=5x+2y$

ב. $f(x,y)=x^2+y^2$

ג. $f(x,y)=x\cdot y$

ד. $f(x,y)=x^2\cdot y$

ה. $f(x,y)=x^2+2x+y$

ו. $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} & x\le 0\\ |y| & x>0\end{cases}$

ז. $f(x,y)=\min\{x,y\}$

ח. $f(x,y)=\max\{x^2+y^2,x\cdot y\}$

ט. $f(x,y)=\min\{x^2+y^2,x\cdot y\}$

י. $f(x,y)=\dfrac{e^{(x^2)}}{e^{2x+y}}$, בפונקציה זו – עבור הערכים 1 ו- e^3

3. בכל אחד מהגבולות דלקמן קבע אם הגבול קיים, וחשב אותו:

א. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3\cdot x\cdot y$

ב. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=\begin{cases}3\cdot x\cdot y & (x,y)\ne(1,2)\\ 0 & (x,y)=(1,2)\end{cases}$

ג. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x-2y}{2x-3y}$

ד. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ה. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x+y-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}$

ו. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{\left(\frac{-1}{x^2(y-1)^2}\right)}$

4. קבע לכל אחת מהפונקציות הבאות אם היא רציפה בנקודה (0,0)

א. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ב. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

תרגיל 11 – נגזרות ודיפרנציאלים בפונקציות רבות משתנים

1. חשב את כל הנגזרות החלקיות מסדר ראשון ושני בפונקציות אלו:

א. $$f(x,y)=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$$

ב. $$f(x,y)=e^{2x+3y}$$

ג. $$f(x,y)=x^y$$

ד. $$f(x,y,z)=3\cdot x^2\cdot y\cdot z+4\cdot x\cdot e^{z\cdot y}$$

ה. $$f(x,y)=3x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}$$

2. הוכח שהפונקציה $z=y\cdot\ln(x^2-y^2)$ מקיימת $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

3. נתונה הפונקציה $f(x,y)$, כאשר $\begin{cases}x=s^2-t^2\\ y=t^2-s^2\end{cases}$ הוכח שקיים $t\cdot\frac{\partial f}{\partial s}+s\cdot\frac{\partial f}{\partial t}\equiv 0$

4. חשב בקירוב בעזרת דיפרנציאל, את הביטויים האלה:

א. $\sqrt{3.01^3+3\cdot 2.98}$

ב. $(1.01^2\cdot 0.98)^{\frac{1}{15}}$

5. חשב בקירוב בעזרת דיפרנציאל את השינוי ביתר של משולש ישר זווית שניצביו הם 6 ו-8, כאשר מאריכים את הניצב הקצר ב 1/4 ומקצרים את הניצב הארוך ב1/8 .

6. נתונה פונקציה סתומה $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$. חשב את dy/dx ואת dx/dy.

7. נתון העקום $5x -2y +y^3 -x^2y = 0$. חשב את משוואת הישר המשיק לעקום בנקודת ראשית הצירים.

8. נתונה תיבה שבסיסה הוא ריבוע שצלעו x וגובהה y. חשב את dx/dy כאשר שטח הפנים נשאר ללא שינוי.

9. חשב את $\partial z/\partial x$ ואת $\partial z/\partial y$ כשנתון $e^{x\cdot y}+e^{y\cdot z}+e^{x\cdot z}=20$

10. הוכח שבכל פונקציה $\Phi(x,y)=0$ קיים

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\Phi_y^{\ 2}\cdot\Phi_{xx}+2\cdot\Phi_x\cdot\Phi_y\cdot\Phi_{xy}-\Phi_x^{\ 2}\cdot\Phi_{yy}}{\Phi_y^{\ 3}}$$

והדגם זאת על $x^3 - y^3 - 3xy = 0$

11. בפונקציה הסתומה $z^3 - xy - y = 0$ הוכח שקיים $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{9z^2}$

תרגיל 12 – מקסימום ומינימום בפונקציות רבות משתנים

1. חשב את נקודות המינימום והמקסימום בפונקציות אלו:

א. $f(x_1,x_2)=2x_1+x_2-x_1{}^2+x_1x_2-x_2{}^2$

ב. $f(x_1,x_2)=x_1{}^3+x_2{}^2-6x_1x_2-12x_1+12x_2+20$

ג. $f(x_1,x_2)=x_1{}^3+3x_1x_2{}^2-3x_1{}^2-3x_2{}^2+14$

ד. $f(x,y)=8\ln x-xy+y^2$

ה. $f(x,y)=4x^2-x\cdot y+\dfrac{y^3}{3}-2y+9x+1$

2. הוכח שלפונקציה $f(x,y)=e^x+x\cdot y+e^y$ אין נקודות מינימום ומקסימום.

3. חברה מייצרת שני סוגי שוקולד. הוצאות הייצור הן 5 ש"ח לק"ג מסוג ראשון, ו 6 ש"ח לק"ג מסוג שני. אם השוקולד נמכר במחירים של P_1 ו P_2 לק"ג בהתאמה, אזי הכמויות הנמכרות בשבוע הן: $x_2=40+5P_1-10P_2$; $x_1=5(P_2-P_1)$.

קבע את P_1 ו P_2 כך שרווח החברה יהיה מקסימלי.

4. נתונה הפונקציה $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$, כפופה למגבלה $x_1^2+x_2^2-4x_1-2x_2-15=0$ מצא לה נקודות חשודות לאקסטרמום

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2$; כפופה למגבלה $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ כאשר $a^2>b^2$

הוכח שערכי הפונקציה החשודים לאקסטרמום הם a^2 ו- b^2.

6. מצא ערכים חשודים לאקסטרמום בפונקציות אלו:

א. $\begin{cases} f(x,y)=x+2y \\ s.t.\,x^2+y^2=1 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z \\ s.t.\,x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$

7. חשב את הערכים החשודים לאקסטרמום של Z עבור

$$2x^2+3y^2+3z^2-12xy+4xz=85$$

8. על קופסא מלבנית הפתוחה מלמעלה להיות בעלת נפח של 32 סמ"ק.
מה חייבים להיות מימדיה כדי ששטחה הכללי יהיה מינימלי? פתור את השאלה בשני דרכים:

א. בעזרת כופלי לגרנז'

ב. על ידי הצבת המגבלה בפונקצית המטרה

9. ראובן ושמעון צורכים שני מוצרים. אם x ו y הם הכמויות מהמוצרים (בהתאמה), אזי פונקציית התועלת של ראובן היא: $U(x, y) = \ln x + 2\ln y$; ושל שמעון $U(x, y) = x \cdot y^2$ מחירי המוצרים ליחידה הם: Px=5 ו Py=2. לראובן ושמעון הכנסות זהות, בגובה 90 ש״ח כל אחת. מצא את הכמות האופטימלית הנצרכת מכל אחד משני המוצרים ע״י כל אחד מהשניים.

10. פירמה התחייבה לספק 10 יחידות של המוצר z. מוצר זה היא מייצרת בעזרת גורמי הייצור x ו y, כאשר פונקציית היצור היא: $Z = \sqrt{2xy}$ (x, y ו z מסמנים גם את הכמויות המתאימות מכל אחד). מחירה של יחידה מ-x קבוע ושווה ל - 5, בעוד מחיר y תלוי בכמות הנצרכת ממנו ע״פ $P_y = \frac{y}{2}$. מהן הכמויות האופטימליות של x ו y שבהן תשתמש הפירמה.

תרגיל 13 – פונקציות הומוגניות

1. קבע אלו מהפונקציות הבאות הומוגניות, עבור הפו' ההומוגניות מצא את דרגת ההומוגניות.

א. $f(x_1, x_2) = ax_1x_2$

ב. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

ג. $f(x_1, x_2) = ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$

ד. $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 - x_2}{x_1 + x_2}$

ה. $f(x_1, x_2) = \dfrac{\ln x_1 + \ln x_2}{\sqrt{x_1 \cdot x_2}}$

2. תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, f הומוגנית מדרגה r_1 ו-g הומוגנית מדרגה r_2 קבע לכל אחת מהפונקציות הבאות אם היא הומוגנית, ומאיזו דרגה:

א. $f \cdot g$

ב. f/g

ג. $f+g$

3. הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מדרגה 2, הפונקציות $x=g(s,t)$ ו-$y=h(s,t)$ הומוגניות מדרגה 3. נגדיר $w(s,t)=f(g(s,t),h(s,t))$ קבע אם w פונקציה הומוגנית ומאיזו דרגה?

4. תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מדרגה r, אזי הוכח שסכום הגמישויות של f לפי x ולפי y שווה ל-r.

5. תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מדרגה 1 הוכח שקיים:

$$x^2 \cdot f_{xx} + 2xy \cdot f_{xy} + y^2 \cdot f_{yy} \equiv 0$$

6. $f(x,y)$ הומוגנית מדרגה אפס, הוכח שקיים בכל נקודה $\dfrac{f_x}{f_y} = -\dfrac{y}{x}$

7. נתונה הפונקציה $w(x,y,z) = \left(\dfrac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$ השתמש בתכונות הפונקציות ההומוגניות כדי להוכיח כדלקמן:

א. $x \cdot \dfrac{\partial w}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial w}{\partial y} + z \cdot \dfrac{\partial w}{\partial z} \equiv 0$

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + z^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2xz\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + 2yz\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \equiv 0$$

8. f(x,y) הומוגנית מדרגה 3 ומקיימת f(6,9)=54. g(t) פונקציה במשתנה אחד השווה בכל נקודה ל- $f(0.5t^2, 0.25t^3+1)$ חשב את g'(2)

9. f(x,y) הומוגנית מדרגה 3 ומקיימת f(2,-1)=4 חשב את $f_x(8,-4) - 2\cdot f_y(4,-2)$

10. תהי g פונקציה במשתנה אחד, ותהי f פונקציה בשני משתנים המקיימת

$$f(x,y) \equiv \ln 2^x \cdot g\left(\frac{\sqrt{x\cdot y}}{x+y}\right)$$

א. הוכח ש- fהומוגנית ו קבע את דרגת ההומוגניות

ב. נתון ש- $g(\frac{1}{2}) = 3$ חשב את $f_x(1,1) + f_y(1,1)$

11. f(x,y) פונקציה הומוגנית המקיימת : f(-2,1)=-15, f(4,-2)=120 , $f_x(-2,1) = 30$ חשב את דרגת ההומוגניות של f ואת $f_y(4,-2)$

12. תהי f(x,y) פונקציה המומוגנית מדרגה r

א. האם ln f(x,y) הי פונקציה הומוגנית

ב. הוכח כי בנקודה (x,0) מתקיים $\frac{\partial}{\partial x}(\ln f(x,y)) = \frac{r}{x}$

תרגיל 14 – האינטגרל הכפול

חשב את האינטגראלים הבאים:

1. $\int_0^1\int_1^2 dxdy$

2. $\int_1^2\int_0^3 (x+y)dxdy$

3. $\int_2^4\int_1^2 (x^2+y^2)dydx$

4. $\int_0^1\int_{x^2}^{x} x\cdot y^2 dydx$

5. $\int_0^1\int_0^{x^2} xe^y dydx$