פתרון מבחן מועד ב'

66-231-01   בקורס 12.9.13

שאלה 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 5 & 10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 12 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \dim W = n - r(A) = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$$

שאלה 2

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1-\lambda) & -1 & -1 \\ 1 & -1 & (1-\lambda) & -1 \\ 1 & -1 & -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{C_2 \to C_2 - C_1}}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{C_1 \to C_1 + C_2}}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -1 \\ \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{C_1 \to C_1 + C_2}}$$

$$(2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^3 \cdot (\lambda+2)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \qquad \lambda_4 = -2$ ישנם ערכים עצמיים שונים: $2,-2$

$\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}]{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = c$, $x_1 = a + b + c$

יש שלושה וקטורים עצמיים בת"ל, ולכן סה"כ יש [illegible] ארבעה וקטורים בת"ל למטריצה. שלושה עבור $\lambda=2$ ואחד עבור $\lambda=-2$ ולכן המטריצה ניתנת ללכסון.

שאלה 3

אין מכרים לכטונה אולי

$$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3.5,\ \lambda_3=0.5$$

תשובה ה: ע"ג הוכחה ר"מ

שאלה 4

$$|A|=2 \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$B=-3A^{-1}$$

$$|B|=|-3A^{-1}|=-27\cdot|A^{-1}|=-\frac{27}{2}$$

$$C=A^3B^t \Rightarrow |C|=|A^3B^t|=|A|^3\cdot|B^t|=|A|^3\cdot|B|=2^3\cdot\left(-\frac{27}{2}\right)=$$

$$-8\cdot\frac{27}{2}=-4\cdot 27=-108$$

לכן מטריצה C הפיכה ו-

$$|C|=-108$$

שאלה 5

$$|A|=\begin{vmatrix} k+3 & 1 & 2 \\ k & k-1 & 1 \\ 3(k+1) & k & k+3 \end{vmatrix} \overset{C_1\to C_1-C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k-1 & 1 \\ k & k & k+3 \end{vmatrix} \overset{R_3\to R_3-R_1}{=}$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 0 & k-1 & k+1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ k-1 & k+1 \end{vmatrix} = k(k^2-1-k+1)=k^2(k-1)$$

אז למערכת אין פתרון יחיד כאשר $k=0,1$.

$$k=0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \emptyset$$

$$k=1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-6R_2]{R_2\to 4R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אינסוף פתרונות

למערכת אין פתרון אם $k=0$.

שאלה 6

מכיון שהקבוצות הפורשות U,W בת"ל $\dim U=\dim W=3$.

שאלה 7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 2 & 3 & -1 & b \\ 3 & 1 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 0 & 7 & -9 & b-2a \\ 0 & 7 & -10 & c-3a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 0 & 7 & -9 & b-2a \\ 0 & 0 & -1 & c-a+2b \end{array}\right)$$

למערכת תמיד יש פתרון יחיד

שאלה 8

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1\leftrightarrow R_2 \\ R_3\to R_3-3R_2 \\ R_4\to R_4-4R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & -14 & 24 \\ 0 & 3 & 3 & -12 & 21 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_3\to R_3-2R_2 \\ R_4\to R_4-3R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -22 & 34 \\ 0 & 0 & 12 & -24 & 36 \end{array}\right) R_4\to R_4-R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -22 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$x_4=-1 \Rightarrow x_3=1 \Rightarrow x_2=2 \Rightarrow x_1=1$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=3$$

שאלה 9

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & a \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3=0 \quad \boxed{\lambda=1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכל ערך של a,b אין למערכת
שלושה פתרונות בת"ל
לכן המטריצה לא ניתנת ללכסון
עבור אף ערך של a,b, ולכן אין מטריצה אלכסונית דומה.

שאלה 10

$A+I$ הפיכה כי

$(A+I)(I-A) =$
$= A - A^2 + I - A = I$

והפוכה שלה היא $I-A$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

אבל A אינה 0

שאלה 11

$(1,0,0,1) \in W$
$(2,5,0,-3) \in W$ $\Rightarrow U = Sp\{(1,0,0,1),(2,5,0,-3)\} \subseteq W$

$\dim U = 2$ ו $\dim W = 3$ ב W יש 3 פרמטרים חופשיים לכן

לכן U תת-מרחב של W

מכיון ש $U \subseteq W$ אז $U \cup W$ תת-מרחב.

שאלה 12

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_2 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$-3 + (-3) + 4 = -2$

שאלה 13

$$\det B = \begin{vmatrix} a & -b & c \\ a+d & -e-b & f+c \\ -g & i & -k \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 - R_1}{=} \begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ -g & i & -k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ g & -i & k \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & k \end{vmatrix} = \det A = 5$$

שאלה 14

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 4 & -5 & b \\ -1 & -2 & 2 & 1 & c \\ 1 & 3 & 1 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & c+a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to 3R_4 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & -3 & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & 0 & c+a \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -5a+3d+b \end{array}\right) \quad R_4 \to 3R_4 - 2R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 & a \\ 0 & \boxed{-3} & 2 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & c+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -17a+9d+3b-2c \end{array}\right)$$

$$\boxed{-17a+9d+3b-2c=0}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ -5 & 3 & 4 & -1 & b \\ 2 & -1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 2 & 7 & 4 & d \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -2 & -6 & -6 & b-5a \\ 0 & 1 & 3 & 3 & c+2a \\ 0 & 3 & 9 & 5 & d+a \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_3]{R_3 \to 2R_3 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{-2} & -6 & -6 & b-5a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a+b+2c \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & d-5a-3c \end{array}\right) \qquad \boxed{-a+b+2c=0}$$

$W \cap U$

$$\begin{cases} -a+b+2c=0 \\ -17a+3b-2c+9d=0 \end{cases}$$

במערכת שני דרגות חופש
לכן

$\dim(W \cap U) = 2$

שאלה 15

$$X \cdot A = B$$

אם A הפיכה אז

$$\boxed{X = B \cdot A^{-1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 + \frac{1}{2} R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2} R_3]{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$$

לכן A הפיכה ו-

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1.5 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1.5 & 1 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$