

בס"ד

מבחן בקורס: שיטות כמותיות
 תאריך המבחן: 30.07.12
 סמסטר: ב', תשע"ב, מועד: א'
 מרצה: ד"ר א. חולס
 משך המבחן: 120 דקות (שעתיים)
 חומר עזר: מותר שימוש במחשבון (כיס/לא גרפי).
 הוראות המבחן: ענו על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
 נא, לכתוב ברור ובצורה מסודרת. לכל שאלה נקוד זהה.

שאלה 1.

1. נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} -3x_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 1 \\ (a+1)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + (a-1)x_3 = -2 \end{cases}$$

א. מצאו את ערכי הפרמטר a עבורם למערכת: א. פתרון יחיד, ב. אינסוף פתרונות, ג. אין פתרון.

ב. מצאו ערך של הפרמטר a עבורו למערכת פתרון יחיד בו מתקיים $x_1 = -3x_3$.

2. נתונות שתי מטריצות רבועיות A ו- B המקיימות $A^2 - AB + I = 0$. האם המטריצה $A - B$ הפיכה? אם כן, מצאו את ההופכית שלה.

שאלה 2.

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- מצאו את ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של המטריצה A .
- האם המטריצה ניתנת ללכסון? אם כן, מהי המטריצה אלכסונית הדומה למטריצה A ומהי המטריצה המלכסנת המתאימה?
- האם מטריצה A הפיכה?

שאלה 3.

נתונים:

$$W = \text{Sp}\{(1,2,-1,1), (2,1,-2,3), (1,4,2,1), (-1,-5,1,0)\}$$

$$U = \text{Sp}\{(-1,-5,2,1), (1,3,-1,2), (2,4,-1,7), (1,-1,1,4)\}$$

- מצאו ל- U בסיס מימד ומשוואות.
- מצאו ל- W בסיס מימד ומשוואות.
- האם $U \cap W$ מהווה תת-מרחב של R^4 ? אם כן, מצאו ל- $U \cap W$ בסיס ומימד.

שאלה 4.

א. האם קיימת מטריצה מסדר 2×2 המקיימת:
 $A = A^{adj}$ ו- $|A| = -4$. נמקו

ב. נתונה קבוצה בלתי תלוייה לינארית של הוקטורים $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. האם הקבוצה
 $\{\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3, \underline{v}_1 - \underline{v}_3, 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + 3\underline{v}_3\}$ גם בלתי תלוייה לינארית?

שאלה 5.

1. נתון: W - אוסף פתרונות של מערכת ההומוגנית:

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל- W .

ב. השלימו בסיס של W לבסיס של R^5 .

2. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. חישבו $|A^{adj}|$.

בהצלחה !!!

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & a-2 & 1 \\ a+1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{vmatrix} -3 & a-2 & 1 \\ a+1 & 2 & 2 \\ 3-a & 0 & a-3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \rightarrow C_1 + C_3} \begin{vmatrix} -2 & a-2 & 1 \\ a+3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & a-2 & 1 \\ a+3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = (a-3) \begin{vmatrix} -2 & a-2 \\ a+3 & 2 \end{vmatrix} = (a-3)[-4 - a^2 - 3a + 2a + 6] =$$

$$= (a-3)(-a^2 - a + 2) = -(a-3)(a-1)(a+2)$$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow a \neq 3, 1, -2$$

פתרון ו'א':

$$a = -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 4R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 5 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{פתרון ו'א' } \leftarrow \boxed{a = -2}$$

$$a = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 3R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \text{פתרון ו'א' } \boxed{a = 1}$$

$$a = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \text{ פתרון ו'א' } \boxed{a = 3}$$

⑩ למעשה פתרון ו'א' א'א':
א'א' פתרון ו'א':
א'א' פתרון ו'א':
א'א' פתרון ו'א':
א'א' פתרון ו'א':

$$x_1 = -3x_3 \Rightarrow \frac{|A_1|}{|A|} = -3 \frac{|A_3|}{|A|} \Rightarrow |A_1| = -3|A_3| \text{ ②}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & a-2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \rightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_1}} \begin{vmatrix} 1 & a-3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(a+1)(a-3) = -2a^2 + 4a + 6$$

$$\begin{aligned}
 |A_3| &= \begin{vmatrix} -3 & a-2 & 1 \\ a+1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \end{array} \begin{vmatrix} -3 & a-2 & 1 \\ a+7 & 6-2a & 0 \\ a+5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a+7 & 6-2a \\ a+5 & 4 \end{vmatrix} = 4a + 28 - 6a - 30 + 2a^2 + 10a = \\
 &= 2a^2 + 8a - 2
 \end{aligned}$$

$$|A_1| = -3 |A_3|$$

$$-2a^2 + 4a + 6 = -6a^2 - 24a + 6$$

$$4a^2 + 28a = 0$$

$$\boxed{a=0} \text{ or } \boxed{a=-7}$$

$$A^2 - AB + I = 0 \quad (2)$$

$$A(A-B) = -I$$

$$(-A)(A-B) = I \Rightarrow (A-B)^{-1} = -A$$

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_1 \rightarrow C_1 - C_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \end{array} \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 2 & 4 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1+\lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\
 &= -(\lambda+1)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 = -1, \lambda_3 = 8 \quad \therefore p \Rightarrow p'' \sim 3\sigma \quad p' \sim 2\sigma \quad p \sim \sigma$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \rightarrow \frac{1}{4} R_1 \\ R_2 \rightarrow 2R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$x_2 = t \quad x_3 = s \quad x_1 = -\frac{1}{2}t - s \quad \begin{pmatrix} -0.5t - s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 8 = 8 \neq 0$$

(d)

... ..

33 dke

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & | & x_1 \\ -5 & 3 & 4 & -1 & | & x_2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & | & x_3 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & | & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 5R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & | & x_1 \\ 0 & -2 & -6 & -6 & | & x_2 - 5x_1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & | & x_3 + 2x_1 \\ 0 & 3 & 9 & 5 & | & x_4 + x_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 \rightarrow 2R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 3R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & | & x_1 \\ 0 & -2 & -6 & -6 & | & x_2 - 5x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2x_3 + x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & | & x_4 - 3x_3 - 5x_1 \end{pmatrix}$$

$$\{(-1, -5, 2, 1), (1, 3, -1, 2), (1, -1, 1, 1)\} \text{ u de o'oz } \rho \delta$$

$$\dim U = 3$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

... ..

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | & x_1 \\ 2 & 1 & 4 & -5 & | & x_2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & | & x_3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & | & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | & x_1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & | & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & x_3 + x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | & x_1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & | & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & x_3 + x_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & -5x_1 + x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 3R_4 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & | & x_1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & | & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & x_3 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -17x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 \end{pmatrix}$$

$$\{(1, 2, -1, 1), (2, 1, -2, 3), (1, 4, 2, 1)\} : \text{... } W \text{ de o'oz } \rho \delta$$

$$\dim W = 3$$

$$-17x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 0.$$

... ..

... .. (d)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -17x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -17 & 3 & -2 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 17R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -36 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_3 = s, x_4 = t$$

$$\left(-\frac{4}{7}s + \frac{9}{14}t, -2\frac{4}{7}s + \frac{9}{14}t, s, t \right) =$$

$$= s \left(-\frac{4}{7}, -2\frac{4}{7}, 1, 0 \right) + t \left(\frac{9}{14}, \frac{9}{14}, 0, 1 \right)$$

$$\dim(W \cap U) = 2$$

$$\left\{ \left(-\frac{4}{7}, -2\frac{4}{7}, 1, 0 \right), \left(\frac{9}{14}, \frac{9}{14}, 0, 1 \right) \right\} \quad \begin{array}{l} \text{בסיס} \\ \text{ל} W \cap U \end{array}$$

$$A = A^{\text{adj}}$$

(10)

4, סעיף

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\text{adj}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$$

 $\Downarrow$

$$a = d, b = -c$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a^2 + c^2 > 0$$

כלומר $|A| \neq 0$ ולכן A הפיכה.
כלומר A הפיכה ולכן A^{-1} קיים.

(2)

$$a(\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3) + b(\underline{v}_1 - \underline{v}_3) + c(2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + 3\underline{v}_3) = \underline{0}$$

$$(a + b + 2c)\underline{v}_1 + (-2a - c)\underline{v}_2 + (2a - b + 3c)\underline{v}_3 = \underline{0}$$

כלומר $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ הם בסיס

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ -2a - c = 0 \\ 2a - b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

לכן המערכת היא הומוגנית ויש לה פתרון טריווילי.
כלומר $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ הם בסיס

①. 57 dice

1c

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} x_3 = t \quad x_4 = s \quad x_5 = v \\ x_2 = -\frac{1}{2}t - 2s + \frac{1}{2}v \\ x_1 = -2t - 2s \end{array}$$

$$\begin{aligned} & (-2t - 2s, -\frac{1}{2}t - 2s + \frac{1}{2}v, t, s, v) = \\ & = t(-2, -\frac{1}{2}, 1, 0, 0) + s(-2, -2, 0, 1, 0) + \\ & \quad + v(0, \frac{1}{2}, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

כל וקטור ב- W יכול להיכתב כצירוף ליניארי של וקטורים אלו

$$\left\{ (-2, -\frac{1}{2}, 1, 0, 0), (-2, -2, 0, 1, 0), (0, \frac{1}{2}, 0, 0, 1) \right\}$$

$\dim W = 3$

② $(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ אינם תלויים ליניארית
ב- $(-2, -2, 0, 1, 0)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \neq 0$$

כל וקטור ב- R^5 יכול להיכתב כצירוף ליניארי של וקטורים אלו

②

5 dice

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 + C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

የ"7111" ስጋት ለ A ስንት ርቀት

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{adj} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} A^{adj}$$

$$|A^{-1}| = \left| \frac{1}{4} A^{adj} \right|$$

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{64} |A^{adj}| \Rightarrow |A^{adj}| = \frac{64}{4} = \underline{\underline{16}}$$